FILOZOFICKÁ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE
KATEDRA LOGIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vít Punčochář

SÉMANTIKA NĚKTERÝCH NEOBVYKLÝCH MODÁLNÍCH LOGIK

SEMANTICS OF SOME UNUSUAL MODAL LOGICS

Vedoucí diplomové práce:
Prof. RNDr. Jaroslav Peregrin, CSc.

Praha 2009

Děkuji vedoucímu této práce panu prof. Jaroslavu Peregrinovi za laskavý přístup a všestrannou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů a literatury.

V Praze dne 9.8.2009

. . . .

Abstrakt

První část pojednává o Carnapově příspěvku k modální logice. Carnapovo dílo je začleněno do historického kontextu. Je studována jeho reakce na Lewisovy kalkuly striktní implikace a jeho anticipace kripkovské sémantiky možných světů, na které je založena současná modální logika.

Hlavním cílem druhé části bylo zvážit některé typy modalit. Tyto typy mají epistemický charakter, protože vždy závisejí na určité znalosti. Hlavním výsledkem diplomové práce je zavedení čtyř nových logik. Jejich sémantika je ustavena podobným způsobem, jakým Carnap definoval svoji vlastní modální logiku. Jsou ukázány základní vlastnosti těchto logik a je zkoumán jejich vztah k jiným více obvyklým logikám.

Abstract

The first part deals with Carnap´s contribution to the modal logic. The Carnap´s work is included in the historical context. His reaction to the Lewis´ calculi of the strict implication is discussed and also his anticipation of the Kripkean possible worlds semantics, which the contemporary modal logic is based on.

The main aim of the second part was to consider some kinds of modalities. These kinds of modalities have epistemic character because they always depend on certain knowledge. The main result of the diploma work is the introduction of four new logics. Their semantics is set up in the similar fashion in which Carnap defined his own modal logic. Some basic features of these logics are shown and their axiomatization and relationship to some other more usual logics is investigated.

Obsah

1 Úvod

Hlavním cílem této diplomové práce je představit některé netypické pohledy na logiku modalit. Práce je rozdělena na dvě hlavní části. První část má spíše historický charakter. Popisuje vznik formální sémantiky modalit, ale nečiní si žádné ambice na historickou úplnost, protože ta by zabránila možnosti věnovat se jednotlivým tématům detailněji. Naopak, pozornost je poměrně úzce zaměřena především na příspěvek Rudolfa Carnapa k této problematice. Carnapova logika modalit je však zasazena do historického kontextu. Předchází jí éra syntaktického přístupu k modalitám, ve které vznikly první Lewisovy kalkuly striktní implikace. Nejprve je tedy vyložen tento zrod moderní modální logiky. Dále je vedle Carnapova přístupu představena Carnapem inspirovaná McKinseyho sémantika. Celá první část je završena výkladem kripkovské sémantiky, která dnes tvoří základ logiky modalit.

Druhá část je mým vlastním pokusem o stanovení sémantiky specifického typu modality. Tato sémantika vede k logikám, které mají některé neobvyklé vlastnosti. Především nejsou uzavřeny na univerzální substituci, což může být považováno za podstatný nedostatek, protože uzavřenost na substituci se často chápe jako základní podmínka, kterou musí nějaká množina formulí splňovat, aby mohla být nazývána logikou. Zde se ukazuje důvod, proč je první část věnována Rudolfu Carnapovi. Jeho sémantika totiž vedla k velmi atypické logice, která také není uzavřena na substituci. A ač sémantika vymezená v druhé části nebyla původně motivována Carnapovým přístupem, má s ním některé další společné rysy. Například v obou případech je modální logika vymezena jako logika jediného modelu. V obou případech je možno vyjít ze sémantiky klasické výrokové logiky jako ze základu, ve kterém je již obsažena potřebná logická variabilita, a nad touto sémantikou se fixuje z jejích interpretací jeden model modální logiky. Sémantický přístup v druhé části však využívá navíc inovace, kterou přinesla kripkovská sémantika, totiž relace dosažitelnosti.

Celá práce klade důraz na filosofický aspekt modální logiky. Tím je míněno, že formální systémy modální logiky jsou chápány nikoli čistě technicky, ale jako pokusy o modelování modalit z přirozeného jazyka. To není zcela v souladu s některými moderními přístupy. Např. v učebnici modální logiky [3] je v předmluvě zdůrazňováno, že jazyk modální logiky je velmi dobrým nástrojem pro studium relačních struktur. To je jistě oprávněný pohled, avšak převrací původní intence, ve kterých se relační struktury jevily jako dobrý nástroj ke studiu modalit. Tato práce se tedy hlásí spíše k původnímu pojetí, a proto jsou v ní probírány i některé filosofické otázky, které s logikou modalit souvisí a v jejichž zodpovídání se právě Carnap proslavil (např. otázka extenzionality a intenzionality).

Značení bude většinou vysvětleno v textu. Často se bude pracovat s jazykem klasické výrokové logiky, kde základními spojkami budou konjunkce a negace. $Fle(KVL)$ bude množina formulí v tomto jazyce (vystavěná na spočetné množině atomů At). $Fle(MVL)$ bude množina formulí jazyka modální výrokové logiky, který je rozšířením právě zmíněného jazyka o operátor nutnosti ($\Box$). Symboly $\forall, \exists$ a $\Rightarrow$ budu většinou používat jako symboly objektového jazyka – poslední z nich jako symbol pro striktní implikaci. Výjimečně však bude těchto symbolů použito v metajazyce, a to výhradně při definici množin. Přitom šipka zde bude zkratkou za metajazykové „jestliže ..., pak ...“. Z kontextu bude vždy jasné, v jakém smyslu těchto symbolů právě užívám. Často bude také používáno zkratky „iff“ za metajazykové „... právě tehdy, když ...“.

Část I
Počátky sémantiky modalit

V této části se pokusím nastínit některé historické momenty v moderní modální logice. Budu postupovat od Lewisovy formulace axiomatických systémů striktní implikace ke stanovení kripkovské formální sémantiky pro logiku modalit. Zaměřím se zejména na to, jakou roli v tomto procesu sehrál Rudolf Carnap.

2 Syntaktické období

2.1 C. I. Lewis a počátek moderní modální logiky

Za otce moderní modální logiky je většinou považován Clarence Irving Lewis. Někteří autoři uvádějí, že její zrod se odehrál v roce 1912, kdy Lewis uveřejnil svůj článek *Implication and the Algebra of Logic*. Volker Peckhaus toto tvrzení podrobuje kritice a upozorňuje na práce Hugha MacColla, který již dříve předložil kalkul modální logiky ([28], str. 1). MacCollův příspěvek však sledovat nebudeme a zaměříme se nyní na samotného Lewise. Modality možnosti a nutnosti se u něj zprvu objevují jako neartikulovaná součást modifikovaných verzí výrokových spojek disjunkce, implikace a negace, které Lewis nově zavádí a snaží se fixovat jejich význam vhodným axiomatickým systémem. Základním motivem a výchozím bodem této snahy mu jsou známé paradoxy materiální implikace.

Lewis měl k dispozici algebraickou sémantiku klasické výrokové logiky (dvouprvkovou booleovskou algebru). Charakteristické pro spojky této logiky je to, že operují na pravdivostních hodnotách spojovaných výroků. Pro pravdivostní hodnotu složeného výroku není určující význam jednoduchých vět, ze kterých sestává, ale pouze jejich pravdivostní hodnota. Konkrétně, formuli $\varphi \to \psi$ je přiřazena hodnota pravda právě tehdy, když je přiřazena formuli φ nepravda nebo formuli ψ pravda. Pojem významu těchto formulí zde nehraje žádnou roli, a tudíž není vůbec potřeba ho zavádět. Ve zmíněném článku *Implication and the Algebra of Logic* se problematizují především dva principy, které získáváme pro takto pojatou „algebraickou“ (nebo také materiální) implikaci:

1. Nepravdivým výrokem je implikován jakýkoli výrok.
2. Pravdivý výrok je implikován jakýmkoli výrokem.

Těmto principům odpovídají dvě formule logicky platné v klasické výrokové logice:

1. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

Lewis tvrdí, že je podstatný rozdíl mezi materiální implikací, pro kterou jsou uvedené zákony charakteristické, a tím, co se za implikaci pokládá v běžné řeči. Skutečně používaná implikace bere v potaz význam vět, které spojuje, a nespokojí se pouze s jejich pravdivostní hodnotou. Protože lze implikaci definovat pomocí disjunkce ($\varphi \rightarrow \psi \equiv_{Df} \neg\varphi \vee \psi$, tuto definici Lewis neproblematizuje), přesouvá se celá dvojznačnost na disjunkci. Objevují se dvě verze, jak (nevylučující) disjunkci chápat. Jsou ilustrovány na následujících větách ([22], str. 523):

1. Caesar zemřel nebo je měsíc celý ze zeleného sýru.

2. Matilda mě nemiluje nebo jsem někým milován.

V obou případech je alespoň jeden z členů disjunkce pravdivý. Mezi spojovanými výroky jsou však odlišné vztahy. Na rozdíl od první věty, kde je jeden z členů pravdivý jaksi pouze náhodou, ve druhé větě není vůbec možné, aby oba její členy byly zároveň nepravdivé. Jinými slovy, *nutně* nastává, že alespoň jeden z členů je pravdivý. A spojku „...nebo ...“ ve druhé větě lze mínit tak, že vyjadřuje tento vnitřní významový vztah spojovaných vět.

Situace by se dala uchopit také prostředky klasické predikátové logiky. Rozdíl dvou uvedených případů by vynikl v tom, že bychom po formalizaci dostali z druhé věty logicky platnou formuli a z první nikoli. Lewis však postupoval jinak. Dnes bychom řekli, že metavlastnost formulí „být logicky platnou“ nepojmul na metaúrovni, ale zakomponoval ji do objektového jazyka, konkrétně do spojky disjunkce. O několik desítek let později byla Carnapem vytvořena jedna z prvních formálních sémantik pro modální logiku, která byla založena na podobném přímočarém překladu logické platnosti do objektového jazyka. Níže se jí budeme velmi podrobně věnovat.

Disjunkci klasické výrokové logiky, která operuje pouze na pravdivostních hodnotách a je užita v první větě (považujeme-li první větu za pravdivou), nazývá Lewis „extenzionální“. Disjunkci druhé věty – vyjadřuje-li významový vztah spojovaných výroků – označuje jako „intenzionální“.[1] A dále se zabývá jejich vztahy a odlišnostmi: 1. Intenzionální disjunkce libovolných výroků implikuje jejich extenzionální disjunkci, ale naopak to neplatí. 2. Jsou-li dány libovolné dva empirické výroky a chceme-li zjistit pravdivostní hodnotu jejich extenzionální disjunkce,[2] musíme se obrátit k fakům a zjišťovat, zda jsou pravdivé samotné tyto výroky. Fakty zde mají na výsledek podstatný vliv. Oproti tomu zcela nezávisle na faktech můžeme rozhodnout, je-li pravdivá

[1] Jak uvidíme, bude to opět Carnap, kdo dá později pojmům extenze a intenze přesný význam.

[2] Zde by bylo vhodné dodat: jejichž intenzionální disjunkce pravdivá není.

jejich intenzionální disjunkce. Jak je patrné z druhé z výše uvedených vět, faktický stav nemůže pravdivost intenzionální disjunkce nijak ovlivnit. 3. Pro extenzionální disjunkci jakožto disjunkci klasické výrokové logiky platí De Morganův zákon: formule $\neg(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \wedge \neg\psi$ jsou logicky ekvivalentní. De Morganův zákon neplatí pro intenzionální disjunkci – její negace neznamená negaci jejích členů, ale negaci samotného disjunktivního vztahu mezi členy. ([22], str. 524)

Pokud definujeme implikaci pomocí extenzionální disjunkce, získáváme klasickou materiální implikaci. Pokud ji však definujeme pomocí disjunkce intenzionální, získáváme zcela novou spojku: tzv. striktní implikaci. Charakter materiální implikace byl fixován v axiomatickém systému, který se objevil v Russellově a Whiteheadově díle *Principia Mathematica*. Podle Lewise je tento kalkul „nepravdivý" ve stejném smyslu, v jakém může být „nepravdivá" např. axiomatizace geometrie ([22], str. 530).[3]

Praktický užitek implikace se objevuje zvláště při testování hypotéz, jejichž pravdivost či nepravdivost nám zatím není známa. Každá hypotéza má své logické důsledky, které nezávisejí na její faktické pravdivostní hodnotě. Zcela nezávisle na stavu světa implikuje (v přirozeném a tedy striktním smyslu) výroky, které následně můžeme zvažovat a konfrontovat se světem. Tvrzení, že A *implikuje* B, v tomto procesu znamená to samé, jako tvrzení, že B *vyplývá z* A. Materiální implikace je zde podle Lewise nepoužitelná. Pokud by hypotéza byla nepravdivá, materiálně by implikovala libovolné tvrzení. ([22], str. 529)

Pro Lewise tak vyvstal úkol zachytit zákony přirozené (striktní) implikace vhodnějším kalkulem, než jaký podali Russell s Witeheadem. Jeden z významných pokusů o vybudování tohoto systému se objevil v roce 1918 v Lewisově první knize věnované logice: *A Survey of Symoblic Logic*. Striktní implikace nebyla zavedena v souladu s původními úvahami pomocí intenzionální disjunkce. Mezi primitivními symboly byly kromě atomických formulí $(p, q, r, \ldots)$ spojky negace $(\neg)$, konjunkce $(\wedge)$ a jedna nová modální spojka, totiž silná negace neboli nemožnost $(\sim)$. Dalším primitivním symbolem byla striktní ekvivalence $(\Leftrightarrow)$. Lewis ji však používal pouze pro zavádění nových spojek. Protože lze zavádět nové spojky v metajazyce jako zkratky za základní výrazy, nebudeme počítat striktní ekvivalenci k základním symbolům a po zavedení striktní implikace $(\Rightarrow)$ ji definujeme podobně jako se materiální

[3]Lewis uvádí, že kalkul materiální implikace je nepravdivý tak, jako je nepravdivá neeukleidovská geometrie. To je z dnešní perspektivy zavádějící přirovnání.

ekvivalence definuje pomocí oboustranné materiální implikace.[4] Striktní implikace je zavedena jako nemožnost toho, že přední člen je pravdivý a zadní nepravdivý:[5]

$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv_{Df} \sim (\varphi \wedge \neg\psi) \text{ (striktní implikace).}$$

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv_{Df} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \text{ (striktní ekvivalence).}$$

Lewis pak definuje další modality, především možnost (jako nepravdivost nemožnosti), nutnost (jako nemožnost nepravdivosti) a některé zřetězené (nemožnost možnosti a možnost možnosti). K formulaci kalkulu však nejsou použity. Původní Lewisův kalkul striktní implikace, který provizorně podle svého autora nazveme L, sestává z těchto axiomů:[6]

$(A1)$ $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$

$(A2)$ $(q \wedge p) \Rightarrow p$

$(A3)$ $p \Rightarrow (p \wedge p)$

$(A4)$ $(p \wedge (q \wedge r)) \Rightarrow (q \wedge (p \wedge r))$

$(A5)$ $p \Rightarrow \neg\neg p$

$(A6)$ $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$(A7)$ $\sim p \Rightarrow \neg p$

$(A8)$ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Odvozovacími pravidly jsou:

a) Nahrazení ekvivalentních formulí: Jestliže formule φ je dokazatelná a obsahuje jako svoji podformuli formuli ψ, která je dokazatelně ekvivalentní s formulí χ (tj. formule $\psi \Leftrightarrow \chi$ je dokazatelná), pak nahradíme-li ve φ libovolný výskyt formule ψ formulí χ, výsledek tohoto nahrazení bude opět dokazatelná formule.

[4] Analogicky postupuje při předvedení Lewisových kalkulů Mleziva v [26], str. 101.

[5] Co se značení týče, odchylujeme se od původních Lewisových symbolů.

[6] Formulaci kalkulu přebíráme z [1], str. 504., kde je však uveden bez odvozovacích pravidel. Uvádíme odvozovací pravidla ze *Symbolic Logic*: [23], str. 125-126.

b) Substituce za atomické výroky: Jestliže formule φ je dokazatelná, pak nahradíme-li všechny výskyty libovolného atomu p ve φ libovolnou formulí ψ, výsledek tohoto nahrazení bude opět dokazatelná formule.

c) Adjunkce: Jestliže jsou dokazatelné formule φ, ψ, pak je dokazatelná i formule $\varphi \wedge \psi$.

d) Modus ponens pro striktní implikaci: Jestliže jsou dokazatelné formule φ a $\varphi \Rightarrow \psi$, pak je dokazatelná i formule ψ.

První pokus o kalkul striktní implikace byl neúspěšný. V roce 1920 předvedl E. L. Post, že v L je dokazatelná formule:

$$\sim p \Leftrightarrow \neg p.$$

Tím dochází k redukci striktní implikace na materiální. Kalkul nakonec není ničím jiným než axiomatikou klasické výrokové logiky. Toto zjištění vedlo později Lewise k tomu, že požadoval, aby v novém vydání *A Survey of Symoblic Logic* v roce 1960 byla zcela vypuštěna kapitola, v níž je uvedený kalkul předložen ([24], str. vii).

Oskar Becker uvádí názorný příklad, proč je nezbytné zamítnout ekvivalenci ($A8$) jako platný princip pro striktní implikaci ([1], str. 504-505). Předpokládejme, že máme osudí, v němž je omezený počet očíslovaných kuliček. Kuličky jsou postupně z osudí taženy a po vytažení vraceny zpět. Tímto způsobem nám vzniká posloupnost vytažených čísel. Nyní předpokládejme, že výrok q zní:

„Číslo 19 se vyskytuje mezi prvními sty vytaženými čísly."

Výrokem p je věta:

„Číslo 19 se vyskytuje mezi prvními dvěma sty vytaženými čísly."

Za této situce je nepravdivá pravolevá implikace axiomu ($A8$), tj. tvrzení

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q).$$

Je totiž pravda, že pokud číslo 19 nemůže být mezi prvním stem tažených čísel, pak nemůže být ani mezi prvními dvěma sty taženými čísly. Důvodem je, že číslo nemůže být mezi prvním stem tažených čísel pouze tehdy, když se vůbec v osudí nevyskytuje a nemůže být taženo nikdy. Je tedy pravda, že

$$\sim q \Rightarrow \sim p.$$

Avšak není pravda, že

$$p \Rightarrow q,$$

tj., že výskyt čísla 19 mezi prvními dvěma sty taženými čísly striktně implikuje výskyt čísla 19 mezi prvními sty taženými čísly.

2.2 Lewisovy kalkuly $S1 - S5$

Ač byl neúspěšný, znamenal první Lewisův pokus o axiomatizaci podnět k intenzivnímu zkoumání striktní implikace a do tohoto podniku se zapojilo mnoho dalších autorů. Lewis svůj systém poopravil tak, že axiom ($A8$) zjednodušil na implikaci:

$$(A9) \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p).$$

Výsledný kalkul se shodoval s tím, co bylo v díle *Symbolic Logic* z roku 1932, které Lewis napsal s C. H. Langfordem, nazváno logikou $S3$. Opravený systém již nebyl redukovatelný na systém materiální implikace, avšak pro svého autora stále nebyl uspokojivý. Ten dále pochyboval o intuitivní správnosti některých jeho teorémů. Zejména se jednalo o dokazatelnou formuli ([23], str. 496):

$$(*) \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)).$$

Za účelem odstranění zpochybňovaného teorému systém ještě oslabil, ale protože si stále nebyl jistý, že se tím skutečně stalo ($*$) nedokazatelné, zformuloval ještě jednu, slabší verzi. Vznikly tak systémy $S1$ a $S2$. Na druhé straně se seznámil s axiomy Oskara Beckera, které se týkaly zřetězených modalit. Jejich zakomponováním byly vytvořeny systémy $S4$ a $S5$.

Všechny tyto systémy se objevily v *Symbolic Logic* (viz [23], dodatek II, str. 492-502). Základní slovník se zde znovu mění. Symbol pro nemožnost byl nahrazen operátorem možnosti ($\Diamond$).[7] Pro zjednodušení zavedeme také operátor nutnosti ($\Box$), který v *Symbolic Logic* použit nebyl:

$$\Box\varphi \equiv_{Df} \neg\Diamond\neg\varphi \text{ (nutnost)}.$$

[7] Na tomto základě je také třeba poopravit definici striktní implikace: $\varphi \Rightarrow \psi \equiv_{Df} \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\psi)$. Také v axiomech ($A7$) a ($A9$) nahrazujeme symbol $\sim$ pomocí $\neg\Diamond$. Další drobné a nepodstatné odlišnosti oproti původní formulaci axiomů zanedbáme.

Odvozovací pravidla jsou stále stejná. Základ pro $S1$ tvoří axiomy $(A1)-(A6)$ systému L plus axiom:

$(A10)$ $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

$S2$ vznikne obohacením $S1$ o axiom:

$(A11)$ $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p$.

Již jsme zmínili, že $S3$ je tvořen axiomy $(A1) - (A7)$ a $(A9)$. $S4$ dostaneme přidáním následujícího axiomu k $S1$:

$(A12)$ $\Box p \Rightarrow \Box\Box p$.

A konečně $S5$ je určen rozšířením $S1$ o axiom:

$(A13)$ $\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

Ukázalo se, že systémy $S1$-$S5$ jsou hierarchicky uspořádané, tj. systém s větším číslem je vždy ostře silnější než systém s číslem menším. Až na jediný bod byl tento výsledek předveden již v prvním vydání *Symbolic Logic*. Lewis sice už v té době věděl, že v $S3$ jsou dokazatelné formule $(A10)$, $(A11)$ a tedy všechny axiomy logiky $S2$, ale chyběl mu ještě důkaz toho, že $S3$ je *ostře* silnější než $S2$. Podal ho později W. T. Parry, přičemž bylo zdůvodněno také, že problematizovaná formule $(*)$ není teorémem systému $S2$. Tím si tento kalkul získal Lewisovu důvěru a ten ho začal považovat za nejadekvátnější verzi axiomatiky striktní implikace ([27], str. 134). Abychom ilustrovali metodu, pomocí které se takové otázky řešily (a která je v podstatě sémantická), předvedeme, jak Parry postupoval.[8]

Věta 2.2.1 *Axiom $(A9)$ a formule $(*)$ nejsou dokazatelné v $S2$.*

Důkaz: Zkonstruujeme „model“ logiky $S2$, v němž neplatí formule $(A9)$ a $(*)$. Nosnou množinu budou tvořit čísla $0, 1, \ldots, 7$. Na těchto hodnotách definujeme operace pro základní spojky. Je-li formuli φ přiřazena hodnota h, formuli $\neg\varphi$ bude přiřazena hodnota $7 - h$. Operace pro možnost a konjunkci jsou definovány následujícími tabulkami:

[8] Důkaz přebíráme z druhého vydání *Symbolic Logic*, kde je uveden v dodatku III ([23], str. 506-507).

φ	$\Diamond\varphi$
0	1
1	5
2	7
3	7
4	7
5	7
6	7
7	7

$\varphi \wedge \psi$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7

Na tomto základě může být podle definice zkonstruována také tabulka pro striktní implikaci. Řekneme, že daná formule je splněná při daném ohodnocení svých atomických formulí (hodnotami $0, 1, \ldots, 7$), když při tomto ohodnocení nabývá buď hodnoty 6, nebo hodnoty 7. Řekneme, že daná formule je platná, když je splněná při všech možných ohodnocení svých atomů. Nyní lze ověřit, že všechna odvozovací pravidla zachovávají platnost. Navíc jsou platné všechny axiomy systému $S2$. Tedy každý teorém tohoto systému je platný. Při ohodnocení přiřazujícím atomu p hodnotu 1 a atomu q hodnotu 0 není splněný axiom $(A9)$, který tedy není dokazatelný v $S2$. Při ohodnocení přiřazujícím atomu p hodnotu 1 a atomům q a r hodnotu 0 není splněná formule $(*)$. Formule $(*)$ tedy také není teorémem systému $S2$. Q.E.D.

V dalším textu budeme narážet především na souvislosti s logikami $S4$ a $S5$, které jako jediné z právě předvedených spadají pod současný technický termín „normální modální logika“. Lewis ukázal, že definujeme-li materiální implikaci $(\rightarrow)$ předpisem

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv_{Df} \neg(\varphi \wedge \neg\psi),$$

můžeme již v $S1$ dokázat všechny teorémy Russellova výrokového kalkulu ([23], str. 136-140). To znamená, že systémy $S1$-$S5$ bychom měli chápat spíše jako rozšíření klasické výrokové logiky než jako její alternativu. Tento pohled později vedl k moderní formulaci logik $S4$ a $S5$, s níž budeme pracovat. Základními spojkami zůstávají $\Diamond$, $\neg$, $\wedge$. Striktní implikaci již nebudeme používat. Definice nutnosti a materiální implikace zůstává stejná. Disjunkce a materiální ekvivalence se definuje standartním způsobem. Vymezíme nyní pomocný kalkul pro logiku T. Jako axiomy bude obsahovat všechny formule, které mají tvar klasických výrokových tautologií. Dále je axiomem každá formule, která má jeden z následujících dvou tvarů:[9]

(*K*) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,

(*T*) $\Box\varphi \to \varphi$.

Odvozovací pravidla jsou:

a) Modus ponens: Jsou-li dokazatelné formule φ a $\varphi \to \psi$, je dokazatelná též formule ψ.

b) Necesitace: Je-li dokazatelná formule φ, je dokazatelná též formule $\Box\varphi$.[10]

Nový kalkul pro logiku $S4$ je obohacením logiky T o schéma:[11]

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Logiku $S5$ můžeme formulovat jako rozšíření T o schéma:

(5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$.

Tyto nové systémy jsou s původními ekvivalentní v tom smyslu, že určují stejné množiny teorémů.

2.3 Beckerova interpretace zřetězených modalit

Již jsme zmínili, že přidání významných axiomů $(A12), (A13)$ bylo inspirováno Oskarem Beckerem. Poté, co byl opraven původní Lewisův kalkul a byla vytvořena logika nesoucí později označení $S3$, poukázal Becker na to, že v ní můžeme definovat nekonečně mnoho vzájemně neredukovatelných modalit. Např. v následující posloupnosti nejsou žádné dvě formule (striktně, ani materiálně) ekvivalentní:[12]

$$\Diamond p,\ \Diamond\Diamond p,\ \Diamond\Diamond\Diamond p,\ \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p,\ \ldots.$$

[9]Schémata uvádíme s jejich současnými názvy.

[10]Logika T se nachází mezi $S2$ a $S4$ a neobsahuje ani není obsažena v logice $S3$ ([3], str. 39).

[11]Řadíme-li schéma mezi axiomy, znamená to že udáváme tvar a určujeme, že každá formule tohoto tvaru je axiomem.

[12]Tj. v $S3$ nelze mezi těmito formulemi ekvivalence dokázat.

Mezi dvojice operátorů $\Diamond$ bychom mohli vkládat negace $(\ldots\Diamond\neg\Diamond\ldots)$ a získávali bychom další neekvivalentní modality. Tato bohatost se Beckerovi zdála nežádoucí, a proto zkoumal, jaký vliv mohou mít dodatečné axiomy na redukci modalit. Tak např. obohatil kalkul o axiom ($A13$), čímž získal (ještě před vydáním *Symbolic Logic*) systém ekvivalentní s $S5$. Ukázal, že pro libovolnou formuli φ v něm existuje pouze šest základních modalit, v nichž může být kladena ([1], str. 507-511):

1. φ „pravdivost“,
2. $\neg\varphi$ „nepravdivost“,
3. $\Diamond\varphi$ „možnost“,
4. $\neg\Diamond\varphi$ „nemožnost“,
5. $\Diamond\neg\varphi$ „možnost nepravdivosti“,
6. $\neg\Diamond\neg\varphi$ „nemožnost nepravdivosti“ čili „nutnost“,

Každá formule tvaru $x\varphi$, kde x je libovolný řetězec znaků $\neg$ a $\Diamond$, je v $S5$ dokazatelně (striktně i materiálně) ekvivalentní s některou z těchto formulí.

Becker podal také fenomenologickou interpretaci zdvojené nutnosti (tj. interpretaci významu složené spojky $\Box\Box$). Vyjádřil názor, že může mít odlišný smysl od pouhé jednoduché nutnosti ($\Box$). Tím vlastně podal filosofickou kritiku axiomů ($A12$) a ($A13$) (o jejichž zavedení se tolik zasloužil), protože oba vedou k redukci zdvojené nutnosti na jednoduchou. Nyní se pokusíme tuto interpretaci prezentovat, neboť se jedná o velice ojedinělý pokus uvést do souvislosti některé technické záležitosti okolo modálních logik s fenomenologií. K tomu však budeme muset udělat krátkou odbočku od našeho tématu a stručně nastínit některé rysy Husserlovy filosofie.

Výchozím bodem Husserlovy fenomenologie je vědomí. Základním tématem je sféra prožitků. Podstatnou vlastností prožitků je však ve fenomenologii to, že se vždy k něčemu vztahují, jsou tzv. intencionální. Ve všech typech prožitků (jako je např. vnímání, vzpomínání, chtění atd.) je dáno, že zde musí být vztah k nějakému předmětu (vnímanému, vzpomínanému, chtěnému atd.). V rámci fenomenologie můžeme tedy mluvit i o jiných předmětech než o prožitcích. Jsou to předměty, k nimž se prožitky vztahují, jsou to tzv. předmětné koreláty prožitků. Alespoň naznačíme, jak složitým způsobem se vědomí vztahuje k předmětům. Intencionální objekt prožitku někdy přesahuje předmět, na nějž je prožitek přímo zaměřen. Ve vědomí prostého vnímání věci může být fundován nový stav vědomí, který např. k věci zaujímá stanovisko. Původní prostě vnímaná věc se rozchází s nově vnímanou věcí, k níž náleží hodnota, která byla konstituována v prožitku hodnocení. Vědomí má neustálý potenciál k objektivaci toho, co prožívá, v nový předmět. Tak hodnocením vzniká hodnota, v prožitku činnosti čin, v souzení soud atd. „Díky této objektivaci máme před sebou v přirozeném postoji [tj. ne fenomenologickém - V.P.], a tedy jako *články přirozeného světa*, nejen přírodní věci, nýbrž hodnoty a praktické objekty všeho druhu, města, ulice s osvětlovacími zařízeními, byty, nábytek, umělecká díla, knihy, nářadí atd.“ ([15], str. 79)

Husserl se pokouší o jistou klasifikaci předmětných korelátů vědomí a o jejich hierarchické uspořádání. Individuální předměty, ke kterým se vztahuje empirická zkušenost, mají nahodilý charakter. To neznamená nic jiného, než že je ve vědomí přítomný znak toho, že by tyto předměty mohly být v souladu se svou podstatou jinak, než jak jsou ve zkušenosti dány. K tomu se váže neustálý potenciál vědomí obrátit pohled od individuálního předmětu k jeho podstatě. „Podstata (eidos) je předmětem nového druhu. Jako je v individuálním či zakoušejícím názoru dán individuální předmět, tak je v názoru podstaty dána čistá podstata.“ ([15], str. 25) Jako příklady můžeme uvést podstaty „věta“, „fyzikální věc“, „číslo“, „tvar“, „tón“ „člověk“, ale také podstatu samotného fenomenologicky očištěného vědomí. Podstata není žádný mystický objekt. Svůj charakter podstaty nečerpá z ničeho jiného, než ze specifického charakteru prožitku, jehož je předmětným korelátem. Pro nás je nyní důležité, že podstaty lze rozdělit na materiální a formální. Formální podstaty mají být obměnami podstaty „předmět vůbec“. Spadají sem množiny, relace, kombinace, kardinální čísla, zkrátka objekty čisté matematiky. Ostatní podstaty jsou „materiální“.

K podstatám náleží určité podstatné pravdy. K formálním podstatám se vyjadřují matematické věty, které jsou analytické a a priori. Mezi materiální podstatné pravdy má spadat např. každé fenomenologické tvrzení, ale také třeba věta o tom, že co je zelené, to není modré, či že každý tón má svoji výšku. I tyto věty jsou podle Husserla a priori, avšak syntetické či kontingentní. Není zde přítomno žádné vědomí libovolnosti tak, jako je tomu u individuálního předmětu empirické zkušenosti, a není zde potřeba nějakého konkrétního empirického stvrzení. Ale zároveň tu není vědomí té „logické“ nutnosti, které nalézáme u analytických vět. Husserl k tomu říká: „V jistém smyslu je každé poznání podstaty útvarem „čistého“ rozumu - *čistým od vší empirie* (což na druhé straně označuje i slovo apriori); avšak ne každé poznání je čisté v jistém *druhém smyslu*, ve smyslu *principiální formy*. Apriorní věta o *tónech* vůbec, tedy myšlených v čisté obecnosti, je čistá pouze v prvním smyslu, je to, jak můžeme z jistých důvodů říci, *a priori „kontingentní“*. Má v eidos tón své obsahové jádro, které přesahuje oblast „principiálních“ obecností v nejradikálnějším smyslu a váže větu na „kontingentní“ oblast ideálně možných tónů. *„Čistý“ rozum není povznesený jen nad všechno empiricky faktické, nýbrž také nad všechny hyleticky-obsahové sféry podstat.*“ ([16], str. 46)

Tak jsme se dostali k bodu, kterého se chopil Becker při své interpretaci zdvojené nutnosti. Co to znamená, že A je nutně nutné? To odpovídá podle Beckerovy interpretace Husserlovu pojmu formálního a priori. Oproti tomu např. apriorní pravdy o barvách jsou sice nutné, ale tato nutnost je sama nahodilá. U kontingentního a priori se tedy jedná o pouhou jednoduchou nutnost a zdvojená zde neplatí ([1], str. 518). Již axiom ($A12$), který lze interpretovat tak, že nutnost implikuje svoji nutnost přesně tak, jako pravdivost implikuje svoji pravdivost ([1], str. 514), smazává tedy toto Husserlovo rozlišení tím, že vede k ztotožnění zdvojené negace s jednoduchou. To samé platí samozřejmě i pro axiom ($A13$). Kontingentní a priori je těmito principy vyřazeno ze hry.

2.4 Carnapova logická syntax jazyka

Formální sémantika pro modální logiku dlouho chyběla. Jeden z prvních náznaků její formulace, jehož autorem byl McKinsey a kterým se budeme zabývat později, byl paradoxně motivován dílem, ve kterém je jednak otevřeně prohlašováno, že logika obecně není nic jiného než syntax, a v němž je dále zastávána teze, že logika modalit je v jistém smyslu nadbytečná, protože každý intenzionální jazyk lze bez ztrát nahradit nějakým jazykem extenzionálním. Tímto dílem byla Carnapova kniha *Logische Syntax der Sprache* (1934). Podle autorových vlastních slov byly prvním podnětem k jejímu sepsání diskuse ve Vídeňském kroužku, při kterých se ukazovalo, že každý pokus o přesnou formulaci filosofických problémů končí u logické analýzy jazyka. Protože se tedy zdálo, že se tyto problémy netýkají světa nýbrž jazyka, měl by se jazyk sám stát objektem metajazyka a teprve v tomto metajazyce by měly být filosofické problémy vysloveny a řešeny. Tudíž vypracování vhodného metajazyka by velice přispělo k dosažení větší jasnosti ve filosofii. Důsledné oddělování metajazyka od objektového jazyka v *Logische Syntax der Sprache*, které z této ideje vyplynulo, nemělo předtím obdoby. Nicméně zkoumání filosofických problémů, které mělo být původně hlavním ohniskem, ustoupilo poněkud do pozadí a pozornost byla zaměřena především na formální aspekty syntaktických metod. ([7], str. 55)

Termín „logická syntax“ z názvu Carnapova díla nahradil dřívější označení „metalogika“. Tím je naznačeno, že ve vhodném metajazyce neměl být žádný odkaz k významům výrazů objektového jazyka. Zohledněna měla být pouze logická struktura výrazů. Objektový jazyk je pojat v metajazyce (tj. v jazyce syntaxe) jako kalkul. Každý kalkul (v Carnapově širokém smyslu) je vystavěn z daných elementů, které jsou rozdělené do určitých tříd. Součástí kalkulu jsou vždy nějaká pravidla. Jsou to jednak pravidla formace a jednak pravidla transformace. Jazyky v pojetí logické syntaxe jsou prominentním příkladem kalkulu. Elementy různých druhů zde představují primitivní výrazy. Pravidla formace určují, jak se z jednodušších výrazů vytvářejí výrazy složitější. Pravidla transformace udávají, jak se věty (tj. výrazy jistého druhu) mohou odvozovat za pomoci daných axiomů z jiných vět – jedná se tedy o odvozovací pravidla. Kalkulem v tomto širokém smyslu jsou třeba také šachy. Šachové figurky jsou elementy kalkulu.[13] Pravidla formace zde určují možné pozice figurek a rozložení figurek na počátku hry. Pravidla transformace udávají dovolené tahy figurek. ([8], str. 4-5)

Všechny významné logické kategorie jsou podle Carnapova tehdejšího názoru determinovány čistě syntakticky. Teoreticky by pak mělo být např. možné určit všechny vztahy logického důsledku a logické slučitelnosti v čínském jazyce, aniž bychom znali smysl čínských výrazů. Stačilo by, abychom měli k dispozici pečlivě definovanou syntax tohoto jazyka ([8], str. 259). Z praktického hlediska je však takový podnik u přirozených jazyků nemožný. Důvodem je jednak jejich komplikovanost, jednak jejich vágnost. Carnap proto zkonstruoval dva umělé objektové jazyky (I a II), na nichž modelově předvedl, jakým stylem má být syntax jazyka pojednána. Důvodem toho, že se jedná o dva jazyky, je mimo jiné to, že Carnap chtěl demonstrovat jistou libovolnost při budování syntaxe, která je zakotvena v tzv. principu tolerance, jenž je reakcí na pluralitu logických systémů a spor o jejich oprávněnost (např. spor o to, zda tou pravou logikou je klasická či intuicionistická). Carnap k tomu říká: „*V logice neexistuje žádná morálka.* Každý si může vybudovat vlastní logiku, tj. vlastní formu jazyka, podle svého přání. Vše, co se na něm požaduje, chce-li o ní diskutovat, je to, aby stanovil jasně své metody a udal syntaktická pravidla místo filosofických argumentů.“ ([8], str. 52) Volba mezi dvěma logickými systémy může být založena pouze na nějakém pragmatickém hledisku, tedy na tom, že jeden systém je více vhodný pro nějaký konkrétní účel, a nikoli na tom, že jeden systém je pravdivější.

[13] Zdá se, že by měly být mezi elementy zahrnuty také pozice na šachovnici. Carnap je ale neuvádí.

Jazyk I v sobě zahrnuje aritmetiku přirozených čísel omezenou v souladu s principy konstruktivistické matematiky. Toto omezení je motivováno požadavkem, aby byla uznána jen taková číselná vlastnost, že pro každé číslo lze podle nějaké předem fixované metody v konečném čase rozhodnout, zda mu tato vlastnost náleží či nikoli. Na syntaktické úrovni tomu v Carnapově podání odpovídá zejména to, že jsou zavedeny pouze omezené kvantifikátory (typu „pro každé x menší než n platí, že …“).[14] Oproti tomu v jazyce II s jeho neomezenými kvantifikátory a s predikáty a funktory vyšších typů (libovolné úrovně) lze formulovat celou klasickou matematiku a klasickou i relativistickou fyziku.

Dále uvidíme, že zvláště u jazyka II musel sáhnout Carnap k metodám, které bychom dnes označili spíše jako sémantické než syntaktické. Nutila ho k tomu potřeba vyrovnat se s čerstvými Gödelovými výsledky o nerozhodnutelných větách v aritmetice.[15] Podle nich při libovolné volbě axiomů a efektivních odvozovacích pravidel budou vždy zbývat pravdivé ale nedokazatelné aritmetické věty. To představovalo pro Carnapa úkol vyjasnit tento pojem pravdivosti překračující syntaktickou dokazelnost. Pro své jazyky I a II vytvořil kalkuly v hilbertovském stylu. Z Gödelových vět tedy bylo zřejmé, že některé věty, o kterých by chtěl říci, že jsou logicky (analyticky) platné, nejsou v kalkulu dokazatelné. Musel tedy definovat pojem analytičnosti, který byl širší než pojem dokazatelnosti. Jeho cílem bylo dosáhnout toho pouze syntaktickými prostředky.

Jazyky I a II nebudeme přesně vymezovat. Obsahují běžné logické spojky, omezené resp. neomezené kvantifikátory, proměnné, funktorové a predikátové symboly. Dobře utvořená věta je definována obvyklým způsobem.[16] Poukážeme podrobně pouze na způsob, jakým v nich bylo stanoveno, kdy je věta analytická a kdy kontradiktorická. Jde totiž o specifikaci pojmů, pomocí kterých Carnap interpretoval modality nutnosti a možnosti. Kalkul jazyka I obsahoval kromě logických také aritmetické axiomy a mezi odvozovacími pravidly byla matematická indukce. Carnap zde definoval analytickou větu jako takovou, která je důsledkem prázdné množiny předpokladů. Problém se tedy převedl na pojem důsledku. Nejdříve byl definován pojem přímého dů-

[14]Do jisté míry se však neomezená kvantifikace skrytě dostává do hry v podobě volných proměnných.

[15]Význam Gödelových výsledků pro *Logische Syntax der Sprache* zdůrazňuje např. Coffa v [9], především str. 285-293. Zde také ukazuje, v čem spočívá sémantický charakter některých Carnapových definic.

[16]V souladu s autorem budu hovořit o větách a nikoli o formulích.

sledku. Věta φ je přímým důsledkem množiny vět T, když je odvoditelná z T běžným způsobem (tj. v kalkulu jazyka I) nebo když $T = \{\varphi(x/c_n); n \in N\}$, kde c_n je n-tá číslovka (přesněji nula, na kterou je n-krát aplikována operace následníka) a $\varphi(x/c_n)$ je výsledek substituce termu c_n za proměnnou x ve větě φ. T^* je přímá důsledková množina množiny T, když každá věta z T^* je přímým důsledkem nějaké podmnožiny množiny T. Konečná posloupnost množin $T_1, \ldots, T_n$, kde vždy T_{i+1} je přímá důsledková množina množiny T_i, se nazývá důsledková posloupnost. φ je důsledkem T, když existuje důsledková posloupnost taková, že jejím prvním členem je T a posledním členem je $\{\varphi\}$. ([8], str. 38)

V podstatě tedy spočívá pojem důsledku v obohacení původního kalkulu o možnost transfinitního odvozování za pomoci pravidla:[17]

$$\{\varphi(x/c_n); n \in N\} / \varphi.$$

Za této definice jsou v jazyce I všechny dokazatelné věty analytické, avšak existují zde navíc analytické věty, které nelze dokázat. Kontradiktorická věta je v jazyce I taková věta, jejímž důsledkem jsou všechny věty. Pak je uspokojen požadavek, že každá věta obsahující pouze logicko-matematické výrazy je buď analytická nebo kontradiktorická ([8], str. 40). V logicko-matematickém fragmentu jazyka II mělo být dosaženo stejného cíle, ale právě předvedená definice analytičnosti fungovala pro jazyk I pouze díky jeho jednoduchosti. Pro jazyk II by byla zřejmě stejná definice nepostačující ([9], str. 288). Proto Carnap zvolil jinou strategii anticipující tzv. Tarského definici pravdy, která je dnes ustáleným a základním pojmem formální sémantiky. Tarského definice pravdy se objevila zanedlouho po vydání *Logische Syntax der Sprache*, a tím byla odvedena pozornost od Carnapova pojmu analytičnosti definované pro jazyk II.

V jazyce II jsou všechny predikátové a funktorové výrazy klasifikovány do typů. Nultou úroveň, tj. typ 0, představují číslovky (stejně jako v jazyce I získané pomocí nuly a operace následníka) a číselné proměnné. n-tice výrazů, jejíž i-tý člen je typu t_i, je typu $t_1, \ldots, t_n$. Pokud argument nějakého n-árního predikátového výrazu je typu t, pak tento predikátový výraz je typu (t). Každý funktor je charakterizován dvěma parametry. Jednak typem svého argumentu a dále typem své funkční hodnoty. Pokud daný funktor má argument typu t_1 a hodnotu typu t_2, pak je typu $(t_1 : t_2)$. Tedy např. $((0,0),(0,0:0))$ je typem dvoučlenného predikátu – jeho první člen je typu

[17] Jedná se o tzv. ω-pravidlo.

dvoučlenného predikátu, jehož argumenty jsou číselné výrazy a druhý člen je funktor, jehož argumenty jsou dva číselné výrazy a jehož funkční hodnota je jeden číselný výraz. ([8], str. 84-85)

V jazyce II se kromě logických a aritemtických axiomů vyskytuje verze axiomu výběru a axiomu extenzionality pro predikáty a funktory všech typů ([8], str. 91-93). Při definici analytičnosti postupuje Carnap tak, že nejdříve aplikuje na každou větu proceduru, která ji přetransformuje na její prenexní normální tvar a dále je řešena analytičnost pro tento tvar. Za tímto účelem definuje Carnap pojem valuace. Valuace je vždy nějaký objekt vystavěný na číslovkách v analogii k výrazovým typům následujícím způsobem: Číslovky jsou valuace typu 0. Valuace typu $t_1, \ldots, t_n$ je libovolná uspořádaná n-tice, jejíž i-tý člen je valuace typu t_i. Valuace typu (t) je libovolná množina valuací typu t. A konečně valuacemi typu $(t_1 : t_2)$ jsou funkce, které každé valuaci typu t_1 přiřadí nějakou valuaci typu t_2. Nyní můžeme jednotlivé valuace přiřazovat výrazům tak, aby korespondovaly typy. Přitom valuace přiřazená libovolné číslovce bude vždy tato číslovka sama. Pokud je dána n-tice termů a valuace B_i je přiřazena i-tému z nich, pak valuace přiřazená této n-tici je n-tice $B_1, \ldots, B_n$. Pokud máme funktor f, jemuž je přiřazena valuace B_1 a jeho možnému argumentu V je přiřazena valuace B_2, pak valuace přiřazená výrazu $f(V)$ je objekt, který přiřazuje funkce B_1 objektu B_2. Tedy na základě valuací přiřazených proměnným výrazům získáme valuaci přiřazenou libovolnému termu, který je na nich vystavěn. ([8], str. 108-109)

Nyní přistupuje pojem evaluace, který pro libovolné přiřazení valuací proměnným výrazům (tak aby si odpovídaly typy), přetransformuje libovolnou atomickou větu buď na výraz $0 = 0$, nebo na výraz $0 \neq 0$. Nechť je tedy dáno přiřazení valuací proměnným. Na tomto základě je podle předchozího odstavce určeno přiřazení valuací každému termu. Nechť B_1 je valuace přiřazená predikátu P a valuace B_2 je přiřazena jeho možnému argumentu V (což je nějaká n-tice termů). Jestliže $B_2 \in B_1$, pak je atomická věta $P(V)$ přetransformována na $0 = 0$. Jestliže $B_2 \notin B_1$, pak je atomická věta $P(V)$ přetransformována na $0 \neq 0$. Pokud valuace B_1 (resp. B_2) je přiřazena termu V_1 (resp. V_2), pak jestliže B_1 je identická s B_2, je atomická věta $V_1 = V_2$ transformována na výraz $0 = 0$, jinak na výraz $0 \neq 0$. ([8], str. 110)

Na základě evaluace atomických vět vzhledem k přiřazení valuací proměnným výrazům lze syntakticky přetransformovat celé jádro věty v prenexním normálním tvaru na jednu z vět $0 = 0, 0 \neq 0$. Řekněme, že máme uzavřenou větu ψ v prenexním normálním tvaru (pokud nebyla původní věta uzavřená, můžeme vzít její univerzální uzávěr). ψ je tedy tvaru $Q_1 X_1 \ldots Q_n X_n \varphi$, kde $Q_1, \dots, Q_n$ jsou kvantifikátory, $X_1, \dots, X_n$ jsou proměnné výrazy a φ je jádro věty, které již kvantifikátory neobsahuje. ψ je analytická, když pro libovolné přiřazení valuace proměnné X_1 (resp. pro nějaké přiřazení valuace proměnné X_1) a ... a pro libovolné přiřazení valuace proměnné X_n (resp. pro nějaké přiřazení valuace proměnné X_n) skončí evaluace jádra vzhledem k těmto valuacím transformací na větu $0 = 0$. Pochopitelně pokud je kvantifikátor Q_i univerzální, vybíráme frázi „pro libovolné přiřazení", pokud jde o existenční kvantifikátor, vybíráme frázi „pro nějaké přiřazení". Zvažují se jen taková přiřazení, při kterých valuace typově odpovídají proměnným. Definice kontradiktorické věty je vytvořena tak, aby pro libovolnou uzavřenou matematickou větu ψ platilo, že ψ je kontradiktorická právě tehdy, když negace univerzálního uzávěru věty ψ je analytická. Na základě těchto pojmů byl dále definován pojem důsledku. ([8], str. 110-112, 115, 117)

Vidíme, že celý postup má velice blízko k Tarského definici pravdy. Carnapova evaluace prakticky určuje pravdivostní hodnotu nekvantifikované věty vzhledem k dané valuaci v univerzu vystavěném na přirozených číslech. Ale jak poznamenává Coffa, „Carnap by nikdy nepřipustil užití takovéhoto „realistického způsobu řeči". Místo toho řekl, že jeho pravidla udávají, jak transformovat jednu větu na jinou tak, že nakonec všechny matematické věty jazyka II budou transformovány buď na $0 = 0$, nebo na $0 \neq 0$. Ty první jsou analytické." ([9], str. 293) Interpretace užívající pojem pravdivosti by totiž překročila hranice Carnapova syntaktického podniku.

2.5 Modality v *Logische Syntax der Sprache*

Jak již bylo ukázáno, zrodila se moderní modální logika z kritiky klasických extenzionálních spojek, které můžeme chápat jako operátory na pravdivostních hodnotách. Proti nim byly postaveny intenzionální spojky, např. Lewisova intenzionální disjunkce či striktní implikace. Tyto nové spojky již nepřiřazují jednoznačně pravdivostní hodnotu pravdivostním hodnotám. S jejich zavedením byl vznesen požadavek, aby byla dosavadní logika pravdivostních hodnot obohacena o logiku, která by měla co činit přímo s významy výroků. Carnap na tento požadavek reaguje v *Logische Syntax der Sprache* velice silnou tezí, že takové obohacení je v jistém smyslu zbytečné. Nyní se pokusíme podrobně vyložit, jak je to míněno.

Carnap podává obecné „syntaktické" vymezení extenzionality a intenzionality pro širokou třídu blíže nespecifikovaných jazyků. Tyto pojmy vztahuje nikoli na výrokové spojky, ale přímo na věty a také na celý jazyk. Nejprve terminologie a značení, které nyní použijeme: Řekneme, že ψ je dílčí větou věty φ, jestliže ψ je souvislá část věty φ, která je sama větou (jedná se tedy o pojem zcela analogický pojmu podformule). $\varphi[\psi/\chi]$ bude znamenat výsledek nahrazení nějakého (z kontextu bude jasné jakého) výskytu věty ψ uvnitř věty φ větou χ. Výraz „intenzionální" znamená to samé, co výraz „není extenzionální". Definice extenzionality by měla odpovídat představě, podle které můžeme nahradit dílčí větu libovolnou jinou větou se stejnou pravdivostní hodnotou, aniž by se nám změnila pravdivostní hodnota celku. Pravdivostní hodnota však není syntaktický pojem, proto prvním Carnapovým návrhem byla tato definice: φ je extenzionální vzhledem k danému výskytu své dílčí věty ψ, když pro libovolné χ je věta $\varphi \leftrightarrow \varphi[\psi/\chi]$ důsledkem věty $\chi \leftrightarrow \psi$. ([8], str. 240)

Vymezení by ale mělo být aplikovatelné na co nejširší třídu jazyků. A protože Carnap nechtěl použít předpoklad, že zvažovaný jazyk obsahuje ekvivalenci, definoval extenzionalitu ještě jiným, složitějším způsobem pouze za pomoci pojmu důsledku. Vzhledem k důležitosti pojmů extenzionality a intenzionality pro modální logiku předvedeme i tuto definici. Je motivována pozorováním, že v předchozím vymezení má věta $\chi \leftrightarrow \psi$ tu vlastnost, že ψ je důsledkem vět χ a $\chi \leftrightarrow \psi$, a zároveň χ je důsledkem ψ a $\chi \leftrightarrow \psi$. A navíc pokud nějaká množina vět T má tu samou vlastnost, pak je $\chi \leftrightarrow \psi$ důsledkem T. Tedy pokud je $\varphi \leftrightarrow \varphi[\psi/\chi]$ důsledkem věty $\chi \leftrightarrow \psi$, pak je také důsledkem T. Na tomto základě je možno z definice eliminovat ekvivalenci: Řekneme, že ψ a χ jsou rovnocenné vzhledem k množině vět T, jestliže ψ je důsledkem $T \cup \{\chi\}$ a χ je důsledkem $T \cup \{\psi\}$. φ je extenzionální vzhledem k danému výskytu své dílčí věty ψ, když pro každou uzavřenou větu χ a každou množinu vět T takovou, že ψ a χ jsou rovnocenné vzhledem k T, platí, že φ a $\varphi[\psi/\chi]$ jsou rovnocenné vzhledem k T. Pokud je v nějakém jazyce S každá věta extenzionální vzhledem ke všem svým uzavřeným dílčím větám, pak řekneme, že jazyk S je extenzionální vzhledem k dílčím větám. ([8], str. 241-242)

Analogicky bylo definováno, kdy je věta extenzionální vzhledem k výskytům svých mimologických výrazů (funktorů a predikátů). Uvedeme alespoň, že pro jazyky s ekvivalencí by např. pro predikáty byla definice taková, že věta φ je extenzionální vzhledem k nějakému výskytu svého predikátu P_1, když pro libovolný predikát P_2 stejného typu je věta $\varphi \leftrightarrow \varphi[P_1/P_2]$[18] důsledkem

[18] V analogii s nahrazováním vět představuje $\varphi[P_1/P_2]$ výsledek nahrazení daného výskytu predikátu P_1 predikátem P_2.

věty

$$\forall X_1 \ldots \forall X_n (P_1(X_1, \ldots, X_n) \leftrightarrow P_2(X_1, \ldots, X_n)).$$

Pokud je v nějakém jazyce S každá věta extenzionální vzhledem ke všem výskytům svých dílčích vět a dále ke všem výskytům svých funktorů a predikátů, pak řekneme, že jazyk S je extenzionální. ([8], str. 243-244)

Při tomto vymezení jsou Carnapovy jazyky I a II extenzionální. Naproti tomu Lewisovy jazyky obsahující modality jsou intenzionální. Carnapova teze extenzionality zní: „Univerzální jazyk vědy by mohl být extenzionální; nebo přesněji: pro libovolný intenzionální jazyk S_1 může být zkonstruován extenzionální jazyk S_2 tak, že S_1 lze přeložit do S_2.“[19] ([8], str. 245) Přitom přeložitelnost jazyků je také technický termín, který však ponecháme bez definice na intuitivní úrovni. Jeho význam se naznačí v následujícím výkladu. Carnap udává mnoho příkladů intenzionálních vět. Kromě těch, které obsahují modality, jsou to některé další věty přirozeného jazyka obsahující větu vedlejší uvozenou spojkou „že“:

1. Karel říká, že nyní prší v Paříži.

2. Karel věří, že nyní prší v Paříži.

3. Je divné, že nyní prší v Paříži.

Dále jsou to např. některé věty vztahující se na výrazy:

4. Výraz Prim(3) obsahuje výraz 3.

5. Prim(3) je výsledkem substituce 3 za x v Prim(x).

Carnap nepodává žádný univerzální důkaz své teze extenzionality. Předkládá ji jako hypotézu a zdůvodňuje ji v podstatě pouze empiricky. Pro všechny nalezené příklady intenzionálních vět naznačuje způsob, jak by proběhl překlad do extenzionálního jazyka. Připouští, že tím není zaručeno, že se nemohou objevit žádné nové druhy intenzionálních vět, které by byly nepřeložitelné.

Všechny uvedené příklady mají podle Carnapa něco společného, totiž to, že se jedná o tzv. kvazisyntaktické věty, což má být právě důvodem jejich

[19]Zde dochází k mírné kolizi ve značení. Symboly „S_1“ a „S_2“ pochopitelně neoznačují Lewisovy logiky $S1$ a $S2$, ale libovolné jazyky.

intenzionality. Předpokládejme, že máme nějaký jazyk S, který se vztahuje na nějakou oblast předmětů. Nechť dále E_1 je nějaká vlastnost těchto předmětů taková, že daný předmět má vlastnost E_1 právě tehdy, když výraz, který tento předmět označuje, má v jazyce syntaxe jazyka S určitou syntaktickou vlastnost E_2. Pak řekneme, že vlastnost E_1 je kvazisyntaktická (nebo též pseudo-předmětná). Důvodem tohoto označení je, že se na předměty vztahuje pouze zdánlivě, ve skutečnosti má spíše syntaktický charakter a vztahuje se na symboly. ([8], str. 233-234)

Zajímavým příkladem kvazisyntaktické věty je věta ([8], str. 285):

6. Pět není věc, ale číslo.

Tato věta má na první pohled stejný charakter jako věta: „Pět není sudé, ale liché číslo." Zdá se, že se v ní hovoří také o číslech, což je však jen zdánlivé. Ve skutečnosti je to zamaskovaná syntaktická věta, která vypovídá něco o povaze výrazů. Její korektní překlad by měl znít:

6.* „Pět" není věcné slovo, ale číselné slovo.

Kvazisyntaktické věty mají v jazyce jisté oprávnění. Zjednodušují ho. Zkracují obvykle způsob vyjadřování. Vezměme následující příklad ([8], str. 289):

7. Věta „..." čínského jazyka *znamená*, že měsíc je kulatý.

Tato věta je kvazisyntaktická, protože se zdánlivě vztahuje na mimojazykový předmět měsíc. Její překlad do jazyka syntaxe by mohl znít:

7.* Existuje adekvátní větný překlad z čínského do českého jazyka, ve kterém je věta „..." přeložena na větu „Měsíc je kulatý".

Úspornost kvazisyntaktických vět je zřejmě psychologickým důvodem jejich existence. Přináší však s sebou nepřesnost, která se pak podle Carnapa projevuje fatálně především ve filosofických diskusích. Na základě pseudo-předmětné formulace vzniká mnoho filosofických pseudo-problémů. Ty buď nemají žádný smysl, nebo působí nepřiměřeně jako absolutní problémy, protože předmětným zahalením syntaktické otázky, jejíž zodpovězení je v podstatě záležitostí konvence, ztratíme ze zřetele relativitu problému vzhledem k jazyku, jehož se otázka týká. Např. můžeme sledovat filosofický spor, v němž protilehlá stanoviska jsou charakterizována následujícími větami ([8], str. 300):

8. Některé vztahy náleží mezi základní danosti.

9. Vztahy nejsou nikdy základními danostmi, protože vždy závisejí na vlastnostech svých členů.

Spor se ukáže být pseudo-problémem, přeložíme-li tyto kvazisyntaktické věty do jazyka syntaxe:

8.* Některé dvou- či více-členné predikáty náleží mezi nedefinované deskriptivní primitivní symboly.

9.* Všechny dvou- či více-členné predikáty jsou definovány na základě jednočlenných predikátů.

Překladem se z metafyzického problému, který si zdánlivě žádá absolutní řešení, stává relativní otázka týkající se toho, jak je vystavěn jazyk, o němž je řeč.

Nyní, poté, co jsme upozornili na jisté výhody, ale především problémy, které jsou spojené s kvazisyntaktickými větami, se můžeme vrátit k modalitám. Věty obsahující modální výrazy, stejně tak jako jiné intenzionální věty, jsou podle Carnapa také kvazisyntaktické. Řekněme, že „A“ je libovolná věta daného jazyka. Vezměme následující věty:

10. Je možné, že A.

11. Je nutné, že A.

Tyto věty bývají interpretovány tak, že něco vypovídají o významu věty „A“, či o stavu věcí, který věta „A“ označuje. Proto např. u Lewise vzniká potřeba nové logiky významů. Podle Carnapa se však v těchto větách připisuje objektu A kvazisyntaktická vlastnost (vlastnot E_1 z definice kvazisyntaktičnosti) místo toho, aby se odpovídajícímu syntaktickému objektu „A“ připsala odpovídající syntaktická vlastnost (E_2). Navrhuje následující překlad do vět jazyka syntaxe:

10.* „A“ není kontradiktorická.

11.* „A“ je analytická.

Na základě tohoto pohledu lze obhajovat Russellovu logiku prezentovanou v *Principia Mathematica* proti Lewisově námitce, že v ní nelze vyjádřit, že nějaké věty platí nutně, či že nějaká věta je důsledkem jiné: I když je to pravdivé tvrzení, může Russell oprávněně tvrdit, že jeho systém je vhodný pro účely logiky a matematiky, protože v něm nutně platné věty mohou být dokázány, a vyplývá-li nějaká věta z jiné, pak z ní může být odvozena. ([8], str. 250-255)

I když není nijak v rozporu s charakterem syntaxe zavádět do jazyka modální operátory, nezískáváme tím nic podstatně nového. Jazyk syntaxe je extenzionální a každý intenzionální systém logiky modalit do něj může být přeložen. „*Syntax vždy obsahuje celek logiky modalit.*“ ([8], str. 256) Přestože může být užitečná, není intenzionální logika významu nutná. Jak již jsme zmínili, Carnap se domnívá, že „*aby bylo určeno, zda jedna věta je důsledkem druhé, nemusí být dán žádný odkaz k významu vět. Pouhé stanovení jejich pravdivostní hodnoty je jistě příliš málo; ale stanovení jejich významu je na druhou stranu příliš moc. Postačí, aby byl dán syntaktický tvar těchto vět.*“ ([8], str. 258) Snad jsou některé složky významu, které nejsou formálně, syntakticky postihnutelné. Např. percepční či emotivní obsah výrazů. Tyto složky však nepatří do logiky, ale do psychologie. „*Speciální logika významu je zbytečná;* „neformální logika“ je *contradictio in adjecto. Logika je syntax.*“ ([8], str. 259)

Problému redukovatelnosti modálního slovníku se věnuje Karel Procházka ve své práci [30]. Mimo jiné poukazuje na to, že se k této otázce vyjadřuje dokonce i Kant a zastává ještě radikálnější stanovisko než Carnap. Kant v *Kritice čistého rozumu* klasifikoval soudy podle čtyř hledisek – podle kvantity, kvality, relace a modality. Přitom vyjádřil stanovisko, že pouze první tři z těchto hledisek souvisejí s logickou formou soudu. „Modalita soudu totiž vůbec není podle Kanta ... *vlastností* soudu, nýbrž charakterizuje *vztah* mezi soudem jako takovým a rozvažováním.“ ([30], str. 121)

2.6 McKinseyho „syntaktická konstrukce“ modální logiky

Navzdory právě uvedenému negativnímu postoji vůči modální logice motivovala Carnapova práce zajímavý pokus o její nové založení. Byl uveřejněn v roce 1945 v článku nazvaném *On the Syntactical Construction of Systems of Modal Logic*. Autorem je J. C. C. McKinsey. Svoji definici možnosti označuje jako syntaktickou a explicitně zmiňuje, že je založena na Carnapových myšlenkách. Hlavním společným rysem je však to, že pod hlavičkou syntaxe se skrývá něco, co bychom dnes spíše označili jako sémantiku. McKinseyho konstrukce úzce souvisí s Tarského definicí pravdy, která již byla k dispozici. Ale přestože je již bez obav používán pojem pravdivosti vět, stále se vše děje v rámci samotného jazyka a bez odkazu k nějaké mimojazykové oblasti. Proto také v celé definici hraje klíčovou roli substituce a tato definice je určitou analogií k substituční strategii v případě kvantifikátorů. Intuitivním základem je představa, podle které je nějaká věta možná, když existuje pravdivá věta stejné formy. Věta je tedy nutně pravdivá, když každá věta stejné formy je pravdivá. ([25], str. 83)

Nechť je dán jazyk L, který neobsahuje modality. McKinsey nespecifikuje jeho povahu. Je pouze určeno, že obsahuje nějaké deskriptivní, tj. mimologické symboly a je vystavěn ze svých elementárních vět pomocí spojek $\neg, \wedge$. Splňuje tedy následující dvě podmínky:

$P1$ Jestliže je $\chi \in L$, pak je také $\neg\chi \in L$.

$P2$ Jestliže jsou $\chi_1, \chi_2 \in L$, pak je také $\chi_1 \wedge \chi_2 \in L$.

Jednoduchý příklad takového jazyka bude uveden později. Předpokládejme dále, že je dána množina T pravdivých vět jazyka L. Tedy $T \subseteq L$ a pro libovolné $\chi_1, \chi_2 \in L$ jsou splněny tyto podmínky:

$P3$ $\neg\chi_1 \in T$ iff $\chi_1 \notin T$.

$P4$ $\chi_1 \wedge \chi_2 \in T$ iff $\chi_1 \in T$ a $\chi_2 \in T$.

Nyní obohatíme jazyk L o operátor možnosti, čímž vznikne jazyk L_1. L_1 je průnikem všech množin K, které splňují:

$P5$ $L \subseteq K$.

$P6$ Jestliže je $\chi \in K$, pak je také $\neg\chi \in K$ a $\Diamond\chi \in K$.

$P7$ Jestliže jsou $\chi_1, \chi_2 \in K$, pak je také $\chi_1 \wedge \chi_2 \in K$.

Nechť S je množina substitucí $s_1, s_2, s_3, \ldots$[20]. Každá taková substituce může být pojata jako funkce přiřazující deskriptivním symbolům deskriptivní symboly. Definiční obor této substituce se rozšíří na celé věty. Pro libovolnou substituci $s_n \in S$ a libovolné $\chi_1, \chi_2 \in L_1$ platí podmínky:

[20]Budeme předpokládat, že S má spočetně mnoho prvků, ale tento předpoklad nebude nijak podstatný.

$P8$ $s_n(\Diamond\chi_1) = \Diamond s_n(\chi_1)$.

$P9$ $s_n(\neg\chi_1) = \neg s_n(\chi_1)$.

$P10$ $s_n(\chi_1 \wedge \chi_2) = s_n(\chi_1) \wedge s_n(\chi_2)$.

Substituce $s_1 \in S$ je identita. Pro každou $\chi \in L_1$ platí:

$P11$ $s_1(\chi) = \chi$.

Pro každé dvě substituce existuje substituce, která je jejich složením:

$P12$ Pro každé $s_m, s_n \in S$ existuje $s_t \in S$ tak, že pro každou $\chi \in L_1$ platí $s_m(s_n(\chi)) = s_t(\chi)$.

McKinsey pracuje s takto skromnou logickou výbavou zřejmě kvůli jednoduchosti. Pokud bychom chtěli mít v jazyce další logické symboly (např. kvantifikátory), museli bychom pro ně pochopitelně doplnit další podmínky.

Na základě množiny T pravdivých vět jazyka L definujeme množinu T_1 pravdivých vět jazyka L_1. Je to jediná množina splňující pro libovolné $\chi_1, \chi_2 \in L_1$ následující podmínky:

$P13$ $T_1 \subseteq L_1$.

$P14$ $T \subseteq T_1$.

$P15$ $\neg\chi_1 \in T_1$ iff $\chi_1 \notin T_1$.

$P16$ $\chi_1 \wedge \chi_2 \in T_1$ iff $\chi_1 \in T_1$ a $\chi_2 \in T_1$.

$P17$ $\Diamond\chi_1 \in T_1$ iff existuje $s_n \in S$ tak, že $s_n(\chi_1) \in T_1$.

Nyní přejdeme k jazyku modální výrokové logiky, který je vystavěn z atomických formulí pomocí spojek $\Diamond, \neg, \wedge$. Protože se však bude vztahovat k jazyku L_1, budeme používat překlad mezi těmito jazyky. Pokud $\chi_1, \ldots, \chi_r \in L_1$ a φ je z $Fle(MVL)$ a obsahuje pouze atomy $p_1, \ldots, p_r$ (ne nutně všechny), pak věta $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ jazyka L_1 bude výsledkem substituce vět $\chi_1, \ldots, \chi_r$ za atomy $p_1, \ldots, p_r$ ve formuli φ. Nyní definujeme množinu T_2 pravdivých formulí (vzhledem k T_1). Pro libovolnou formuli $\varphi \in Fle(MVL)$ platí:

$P18$ $\varphi \in T_2$ iff pro libovolné $\chi_1, \ldots, \chi_r \in L_1$ platí, že $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$.

Protože se McKinseyho konstrukce nevztahuje na konkrétní jazyk a konkrétní množinu substitucí jeho deskriptivních symbolů, neznamená ani výstavbu konkrétní modální logiky. Představuje spíše jakousi bázi, z níž je možno vycházet, chceme-li nějaký jazyk obohatit o modality. V reakci na některé názory, že Lewisem preferovaná logika $S2$ je příliš silná, ukazuje McKinsey, že pokud definujeme logiku modalit na právě uvedeném základě, bude alespoň tak silná jako logika $S4$. Předvedeme nyní podrobné zdůvodnění tohoto výsledku. McKinsey ho dokázal pro původní Lewisův kalkul. Budeme postupovat lehce odlišným způsobem a dokážeme tvrzení pro modernější kalkul definovaný v závěru kapitoly 2.2. Postup se nám tím o něco zkrátí. Kromě základních spojek budeme pracovat s již dříve zavedenými spojkami $\Box, \rightarrow$. Jejich definice se nemění. Proto bude vhodné přeformulovat podmínku $P17$ také pro nutnost. Z její definice a z uvedených podmínek plyne:

$P19$ $\Box\chi_1 \in T_1$ iff pro každé $s_n \in S$ platí, že $s_n(\chi_1) \in T_1$.

V následujících tvrzeních všude předpokládáme, že φ, ψ jsou libovolné formule jazyka modální výrokové logiky, které obsahují pouze atomy $p_1, \ldots, p_r$. $\chi_1, \ldots, \chi_r$ budou vždy věty jazyka L_1.

Lemma 2.6.1 *Každá formule jazyka modální výrokové logiky, která má tvar klasické výrokové tautologie, je prvkem T_2.*

Důkaz: Jestliže φ je tvaru klasické výrokové tautologie, pak $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$ zcela nezávisle na volbě vět $\chi_1, \ldots, \chi_r$. Tedy $\varphi \in T_2$. Q.E.D.

Lemma 2.6.2 $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \in T_2$.

Důkaz: Pro spor předpokládejme, že $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \notin T_2$. Z toho postupně vyplývá:

1. Pro nějaké $\chi_1, \ldots, \chi_r$ $[\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
2. $[\neg(\Box(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\Box\varphi \rightarrow \Box\psi))](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
3. $[\Box(\varphi \rightarrow \psi)](\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$ a $[\Box\varphi \rightarrow \Box\psi](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
4. $\Box\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$ a $\Box\psi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
5. Existuje $s_n \in S$ tak, že $s_n(\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \in T_1$ a $s_n(\psi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \notin T_1$.

6. $\varphi(s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r)) \in T_1$ a $\psi(s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r)) \notin T_1$.
7. $[\varphi \wedge \neg\psi](s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r)) \in T_1$.
8. $[\varphi \rightarrow \psi](s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r)) \notin T_1$.
9. $s_n([\varphi \rightarrow \psi](\chi_1, \ldots, \chi_r)) \notin T_1$.
10. $[\Box(\varphi \rightarrow \psi)](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.

3. bod je ve sporu s 10. bodem. Tedy $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \in T_2$. Q.E.D.

Lemma 2.6.3 $\Box\varphi \rightarrow \varphi \in T_2$.

Důkaz: Pro spor předpokládejme, že $\Box\varphi \rightarrow \varphi \notin T_2$. Z toho postupně vyplývá:

1. Existuje $\chi_1, \ldots, \chi_r$ tak, že $[\neg(\Box\varphi \wedge \neg\varphi)](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
2. $\Box\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$ a $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
3. Pro každé $s_n \in S$ platí, že $s_n(\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \in T_1$.
4. $s_1(\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \in T_1$.
5. $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$. (podmínka $P11$)

2. bod je ve sporu s 5. bodem. Tedy $\Box\varphi \rightarrow \varphi \in T_2$. Q.E.D.

Lemma 2.6.4 $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi \in T_2$.

Důkaz: Pro spor předpokládejme, že $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi \notin T_2$. Z toho postupně vyplývá:

1. Existuje $\chi_1, \ldots, \chi_r$ tak, že $[\neg(\Box\varphi \wedge \neg\Box\Box\varphi)](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
2. $\Box\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$ a $\Box\Box\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.
3. Pro každé $s_i \in S$ platí, že $s_i(\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \in T_1$.
4. Existuje $s_n \in S$ tak, že $s_n(\Box\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \notin T_1$.
5. $\Box\varphi(s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r)) \notin T_1$.
6. Existuje $s_m \in S$ tak, že $s_m(\varphi(s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r))) \notin T_1$.

7. $\varphi(s_m(s_n(\chi_1)), \ldots, s_m(s_n(\chi_1))) \notin T_1$.

8. Existuje $s_t \in S$ tak, že $\varphi(s_t(\chi_1), \ldots, s_t(\chi_r)) \notin T_1$. (podmínka $P12$)

9. $s_t(\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \notin T_1$.

3. bod je ve sporu s 9. bodem. Tedy $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi \in T_2$. Q.E.D.

Lemma 2.6.5 *Jestliže $\varphi \in T_2$ a $\varphi \to \psi \in T_2$, pak také $\psi \in T_2$.*

Důkaz: Předpokládáme, že $\varphi \in T_2$ a $\varphi \to \psi \in T_2$. Pro libovolné $\chi_1, \ldots, \chi_r$ pak platí:

1. $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$.

2. $[\varphi \wedge \neg\psi](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.

Z 2. bodu plyne, že:

3. Alespoň jedna z vět $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r), \neg\psi(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ není v T_1.

Z 1. a 3. bodu vyplývá, že:

4. $\neg\psi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.

Tedy $\psi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in T_1$. Protože $\chi_1, \ldots, \chi_r$ byly libovolné, platí, že $\psi \in T_2$. Q.E.D.

Lemma 2.6.6 *Jestliže $\varphi \in T_2$, pak také $\Box\varphi \in T_2$.*

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že $\varphi \in T_2$ a $\Box\varphi \notin T_2$. Z toho postupně vyplývá:

1. Existuje $\chi_1, \ldots, \chi_r$ tak, že $\Box\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.

2. Existuje $s_n \in S$ tak, že $s_n(\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)) \notin T_1$.

3. $\varphi(s_n(\chi_1), \ldots, s_n(\chi_r)) \notin T_1$.

Třetí bod je ve sporu s tím, že $\varphi \in T_2$. Q.E.D.

Věta 2.6.1 *T_2 obsahuje všechny teorémy logiky $S4$.*

Důkaz: V předchozích lemmatech bylo ukázáno, že T_2 obsahuje všechny axiomy logiky $S4$ a že je uzavřená na její odvozovací pravidla. Q.E.D.

Předchozí věta neplatí pro logiku $S5$. McKinsey uvádí následující protipříklad ([25], str. 91-92). Množiny L^*, T^*, S^* představují konkrétní interpretaci množin L, T, S. Je dáno spočetně mnoho různých deskriptivních symbolů $c_1, c_2, c_3, \ldots$. Můžeme předpokládat, že se jedná o číslovky. Elementární věty budou věty typu $c_i = c_j$. Jazyk L^* obsahuje všechny věty vystavěné z těchto vět pomocí spojek $\neg, \wedge$. Z elementárních vět jsou v T^* právě ty věty $c_i = c_j$, u nichž platí, že $i = j$. Na tomto základě jsou do T^* jednoznačně zařazeny další věty tak, aby byly splněny podmínky $P3$, $P4$. Množina S^* je množina všech možných substitucí deskriptivních symbolů, čímž je určena množina T_1^*. Množina T_2^* pak neobsahuje všechny teorémy logiky $S5$, protože T_1^* např. neobsahuje větu $\Diamond\neg(c_1 = c_2) \rightarrow \Box\Diamond\neg(c_1 = c_2)$. Zdůvodnění: $\neg(c_1 = c_2) \in T_1^*$, tedy také $\Diamond\neg(c_1 = c_2) \in T_1^*$. Předpokládejme pro spor, že $\Box\Diamond\neg(c_1 = c_2) \in T_1^*$. Pak pro každou substituci $s_n \in S^*$ platí, že $s_n(\Diamond\neg(c_1 = c_2)) \in T_1^*$. Vezmeme-li takovou s_n, která každý deskriptivní symbol nahrazuje symbolem c_1, dostáváme, že $\Diamond\neg(c_1 = c_1) \in T_1^*$. Tedy existuje taková substituce s_m, že $s_m(c_1) = s_m(c_1) \notin T_1^*$, což je spor.

McKinsey zformuloval dodatečnou postačující podmínku pro S, za které platí korektnost i vůči $S5$:

$P20$ Pro každou substituci $s_m \in S$ a konečnou množinu vět $\chi_1, \ldots, \chi_r \in L$ existuje $s_n \in S$ tak, že $s_n(s_m(\chi_1)) = \chi_1, \ldots, s_n(s_m(\chi_r)) = \chi_r$.

Uveďme jako pozorování, že za této podmínky pro každou větu $\chi \in L_1$ a pro každou substituci $s_m \in S$ existuje $s_n \in S$ tak, že platí $s_n(s_m(\chi)) = \chi$. Důvodem je, že χ je vystavěna pomocí spojek $\Diamond, \neg, \wedge$ z elementárních vět, které jsou v jazyce L. Těchto vět je konečně mnoho. Aplikujeme-li na χ libovolnou substituci s_m a následně substituci s_n, jejíž existence je zaručena podmínkou $P20$ (vzhledem k elementárním větám věty χ), pak bude výsledná věta totožná s větou χ, protože obě substituce můžeme vnořit až k elementárním větám, kde se vyruší.

Věta 2.6.2 *Splňuje-li S podmínku $P20$, pak T_2 obsahuje všechny teorémy logiky $S5$.*

Důkaz: Předpokládejme, že S splňuje podmínku $P20$. Musíme dokázat, že pak pro každou formuli φ jazyka modální výrokové logiky platí, že $\Diamond\varphi \rightarrow$

$\Box\Diamond\varphi \in T_2$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. že existuje nějaká φ, pro niž to neplatí. Pak platí:

1. Existuje $\chi_1, \ldots, \chi_r$ tak, že $[\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi](\chi_1, \ldots, \chi_r) \notin T_1$.

Označíme jako χ větu $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ jazyka L_1. Postupně dostáváme:

2. $\Diamond\chi \in T_1$ a $\Diamond\neg\Diamond\chi \in T_1$.

3. Existuje $s_m \in S$ tak, že $s_m(\neg\Diamond\chi) \in T_1$.

4. $\neg\Diamond s_m(\chi) \in T_1$.

5. $\Diamond s_m(\chi) \notin T_1$.

6. Pro každou substituci $s_t \in S$ platí, že $s_t(s_m(\chi)) \notin T_1$.

K substituci s_m nyní vezmeme substituci s_n, jejíž existence je zaručena podmínkou $P20$ a pro kterou platí $s_n(s_m(\chi)) = \chi$. Vězměme nyní libovolnou substituci $s_u \in S$. Díky podmínce $P12$ a 6. bodu platí:

7. $s_u(s_n(s_m(\chi))) \notin T_1$.

8. $s_u(\chi) \notin T_1$.

Protože s_u bylo libovolné, platí:

9. $\Diamond\chi \notin T_1$.

2. bod je ve sporu s 9. bodem. Q.E.D.

V závěru článku McKinsey uznává jisté nevýhody přístupu, který předložil. Zejména mohou vyvstat problémy, na něž upozornil Tarski. Když totiž v jazyce chybí označení pro některé objekty, na které se však jazyk přesto vztahuje, může být nějaká věta nutná podle uvedené syntaktické definice jen proto, že nemáme dostatek výrazů, a přesto, že věcně by nutná být neměla. Z toho důvodu připouští, že by bylo žádoucí podat formulaci modální logiky na čistě sémantickém základě. ([25], str. 93)

Nicméně je právě McKinseyho systém významným krokem směrem k sémantickému uchopení modalit. Např. B. J. Copeland uvádí, že uvedené výsledky jsou zřejmě vůbec prvními větami o korektnosti týkající se logik $S4$ a $S5$. ([10], str. 103)

3 Sémantické období

3.1 Carnapův sémantický obrat

Navzdory svým původním skeptickým názorům začíná Carnap postupem času přesouvat zájem k logické analýze významu jazykových výrazů. Na základě výsledků Varšavské logické školy (do níž patřili např. S. Lesniewski, T. Kotarbinski, ale především A. Tarski) se mu odkryla možnost jejího exaktního provedení ([5], str. x). O to se pokouší především v sérii tří knih (vydaných postupně v letech 1942, 1943, 1947) nazvané *Studies in Semantics.* V poslední z těchto knih, tj. v díle *Meaning and Necessity*, slouží obecná analýza významu jako podklad pro analýzu významu modalit. Nejprve zde Carnap vytvoří sémantiku jazyka neobsahujícího modality. Poté začlení sémantický pojem logické pravdivosti (L-pravdivosti) do samotného objektového jazyka, a tím vznikne obohacení jazyka o modality. Postup je tedy analogický k postupu v *Logische Syntax der Sprache.* Problematika se však již explicitně přesouvá na pole sémantiky. Než vyložíme, jak Carnap pracuje s modalitami, soustředíme se v této kapitole na způsob, jakým je v *Meaning and Necessity* obecně analyzován význam.

Obecným metodologickým prostředkem je Carnapovi metoda tzv. explikace. Tato metoda znamená nahrazení často užívaného (ať už v běžném životě či v odborném diskurzu), avšak poněkud vágního pojmu nějakým pojmem exaktnějším. Nahrazovaný pojem se nazývá *explicandum.* Nahrazujícímu pojmu říkáme *explicatum.* Dle Carnapa je např. Tarského definice pravdy explikací běžně užívaného pojmu pravdy. Frege a Russell zase nabídli třídu všech n-prvkových tříd jako explikaci čísla n. Zvláště z tohoto druhého případu je zřejmé, že není nezbytné, aby se význam explicata maximálně shodoval s původním významem explicanda. Je pouze důležité, aby explicatum korespondovalo s explicandem v nějakém podstatném směru, aby splňovalo nějakou charakteristickou vlastnost explicanda. ([6], str. 7, 8)

Pro logiku modalit je podstatná Carnapova snaha explikovat Leibnizův pojem logické nutnosti. Explicatem zde má být technický sémantický pojem L-pravdivosti.[21] Základní, ne zcela formální podmínka, která má být splněna, aby bylo možné explicatum považovat za úspěšnou explikaci onoho tradičního filosofického pojmu, je následující ([6], str. 10):

[21]Pojem L-pravdivosti může být chápán také jako explikace Kantova pojmu analytické pravdivosti.

$C1$ Věta φ je L-pravdivá v sémantickém systému S iff φ je pravdivá v S a její pravdivost je založena na sémantických pravidlech samotného systému S bez jakéhokoli odkazu k mimojazykovým faktům.

Sémantická analýza je demonstrována opět na konkrétním uměle vytvořeném jazyku nazvaném „S_1“. Obsahuje:

1. obvyklé výrokové spojky ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$),

2. individuové proměnné ($x, y, z, \ldots$),

3. obecný a existenční kvantifikátor ($\forall, \exists$),

4. iota-operátor a lambda-operátor (ι, λ),

5. sadu individuových a predikátových konstant ($s, w, \ldots, A, B, H \ldots$).

iota-operátor slouží k produkci nových individuových výrazů, lambda-operátor k produkci nových predikátů. Kompletní sémantika pro jazyk S_1 obsahuje čtyři druhy pravidel:

1. pravidla formace,

2. pravidla označování pro individuové a predikátové konstanty,

3. pravidla pravdivosti,

4. pravidla oborů.

1. Pravidla formace určují běžným způsobem, které řetězce výrazů tvoří správně utvořenou větu. Stačí pouze zmínit, že všechny správně utvořené věty jsou uzavřené, tj. neobsahující volné proměnné. Atomické věty jsou řetězce, jejichž první člen je n-ární predikát následovaný n-ticí uzavřených individuových výrazů.

2. Metajazykem je Carnapovi anglický jazyk, pro nás jím tedy bude český jazyk. Pravidla označování pro individuové a predikátové konstanty jsou pak stanovena přímým překladem z S_1 do českého jazyka. Tak např. individuová konstanta s je symbolickým překladem výrazu metajazyka „Walter Scott“, konstanta w je symbolickým překladem výrazu „román Waverley“, Axy je překladem „x je autorem y“. Výraz $\iota x Axw$ pak odpovídá českému výrazu „to jediné individuum x, které je autorem románu Waverley“. Výraz $\lambda x Asx$ odpovídá výrazu „ta individua x, jejichž autorem je Scott“.

3. Pravidla pravdivosti jsou motivována Tarského definicí pravdy. Definice pravdivosti atomických vět předpokládá pravidla označování. Tak např. pro atomickou větu Asw je stanoveno pravidlo:

> Věta Asw je pravdivá právě tehdy, když Walter Scott je autorem románu Waverley.

Carnap uvádí jen několik příkladů, jak je definována pravdivost složených výrazů. Většinou jde o dnes obvyklá pravidla tzv. Tarského definice pravdy. Protože však pro S_1 nepoužívá pojem valuace, je odkázán na substituční strategii při udání pravidel pro kvantifikátory:

> Věta $\forall x \varphi$ je pravdivá právě tehdy, když je pro každou individuovou konstantu a pravdivá věta $\varphi(x/a)$.

4. Pravidla oborů jsou založena na Carnapově explikaci Leibnizova pojmu možného světa (či Wittgensteinova pojmu stavu věcí). Explicatem je pojem: *popis stavu v* S_1. Možný stav věcí má být reprezentován svým popisem. Popis stavu je množina vět jazyka S_1, která obsahuje pro každou atomickou větu buď ji samotnou, nebo její negaci (ne však obojí) a neobsahuje žádnou další větu. Jedná se tedy o jazykový korelát možného ohodnocení atomických vět. Pomocí pravidel analogických k pravidlům pravdivosti je určeno, která věta platí v kterém popisu stavu. Právě tato pravidla se nazývají „pravidla oborů“, neboť na jejich základě je pro každou větu φ určen její *obor* jako množina těch popisů stavů, v nichž φ platí.

Celkový postup je tedy takový, že předpokládáme nějakou faktickou skutečnost, ke které se přímo vztahujeme na metajazykové úrovni. Skrze to definujeme, jak se k této skutečnosti vztahuje objektový jazyk S_1, a na tomto základě definujeme pojem pravdivosti v S_1. Z výrazů našeho objektového jazyka poté zkonstruujeme modely možných světů jakožto možné popisy různých stavů. Přitom jeden z těchto popisů je „pravdivý“, tj. obsahuje právě všechny pravdivé věty. Vše je připraveno pro definici L-pravdivosti, která je inspirována Leibnizovým pojetím, v němž nutná pravda je taková, která platí ve všech možných světech. ([6], str. 10)

> Věta φ je L-pravdivá (v S_1) právě tehdy, když φ platí ve všech popisech stavů (v S_1).

Za této definice je splněna neformální podmínka $C1$, neboť je-li oborem nějaké věty množina všech stavů věcí, nemůže to být určeno ničím jiným než jazykovými pravidly oborů a navíc musí tato věta platit i v „pravdivém“ popisu stavů a je tedy pravdivá. Obráceně, je-li pravdivost nějaké pravdivé věty určena čistě na základě jazykových pravidel, pak musí platit ve všech popisech stavů, protože kdyby v nějakém neplatila, nebylo by zaručeno, že právě on není tím „pravdivým“ popisem a nebylo by tedy bez dalšího dáno, že věta je pravdivá.

Výrazy, na něž má být aplikována analýza významu, tj. takové výrazy, u nichž se předpokládá, že mají do jisté míry nezávislý význam, se nazývají *designátory.* V systému S_1 mezi ně patří věty, predikáty a individuové výrazy. Studována má být pouze *kognitivní* složka jejich významu, abstrahuje se od emotivních či motivačních složek. ([6], str. 6,7)

Carnap rozšiřuje relaci *ekvivalence*, původně vymezenou pouze pro věty, na všechny základní druhy designátorů. Vedle ekvivalence klade její silnější obměnu – relaci *L-ekvivalence.* Tyto pojmy mají sloužit jako základní nástroje analýzy významu designátorů. Pokud φ, ψ jsou věty sémantického systému S_1, P, Q jsou jeho n-ární predikáty a a, b jeho individuové výrazy, definujeme sémantickou relaci ekvivalence (pro S_1) takto ([6], str. 13, 14):[22]

a) φ je ekvivalentní s ψ iff věta $\varphi \leftrightarrow \psi$ je pravdivá.

b) P je ekvivalentní s Q iff věta $\forall x_1 \ldots \forall x_n(P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \ldots, x_n))$ je pravdivá.

d) a je ekvivalentní s b iff věta $a = b$ je pravdivá.

Analogicky definujeme mezi designátory relaci L-ekvivalence:

a) φ je L-ekvivalentní s ψ iff $\varphi \leftrightarrow \psi$ je L-pravdivá.

b) P je L-ekvivalentní s Q iff $\forall x_1 \ldots \forall x_n(P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \ldots, x_n))$ je L-pravdivá.

d) a je L-ekvivalentní s b iff $a = b$ je L-pravdivá.

Carnapova kniha *Meaning and Necessity*, kterou se nyní zabýváme, si klade za cíl vyvinout novou metodu pro analýzu významu. Jedná se o tzv. metodu extenze a intenze. Základní ideou je, že význam je rozvrstven do

[22]Pro jednoduchost v definici předpokládáme, že systém S_1 obsahuje rovnost, přestože jsme to v jeho formulaci neuvedli. Není totiž problém ji do systému zavést a určit pro ni pravidlo, že věta $V_1 = V_2$ je pravdivá iff výrazy V_1, V_2 označují stejný objekt.

dvou základních úrovní. Předběžně můžeme říci, že intenze je ta složka významu, která je stanovena sémantickými pravidly systému. Extenze je určena konfrontací intenze s faktickou skutečností. V jazyce S_1 se vyskytuje např. predikát H, pro nějž jsou stanovena pravidla označování takto:

Výraz Hx systému S_1 je překladem českého výrazu „x je člověk“.

Větu Hs tedy můžeme přeložit na větu „Scott je člověk“. Tuto českou větu můžeme číst buď tak, že Scott patří do množiny všech (fakticky existujících) lidí, nebo tak, že Scott má vlastnost být člověk. Tuto distinkci – motivovanou tradičním rozlišením mezi rozsahem a obsahem pojmu – Carnap explikuje a zobecňuje na všechny typy designátorů. Extenze a intenze je vymezena pro každý z těchto typů. Extenze má být vždy vázána na aktuální stav věcí, zatímco intenze se týká čistě logické charakteristiky významu designátoru. Proto se nabízejí následující definice, z nichž jedna udává kritérium identity extenzí a druhá kritérium identity intenzí. Tato kritéria mohou být považována za základní podmínky, s nimiž musí být ve shodě libovolné objekty, které bychom chtěli označit jako extenze či intenze designátorů. ([6], str. 23)

$C2$ Řekneme, že dva designátory *mají stejnou extenzi* (v S_1) iff tyto designátory jsou (v $S1$) ekvivalentní.

$C3$ Řekneme, že dva designátory *mají stejnou intenzi* (v S_1) iff tyto designátory jsou (v $S1$) L-ekvivalentní.

Entity, které jsou v souladu s těmito podmínkami a které Carnap považuje za vhodné kandidáty na extenze a intenze pro jednotlivé druhy designátorů, uvádíme v následující tabulce.

typ designároru	typ jeho extenze	typ jeho intenze
věta	pravdivostní hodnota	propozice
predikát	třída či relace	vlastnost či vzah
individuový výraz	individuum	individuový pojem

Dle Carnapa není uvedený výběr entit striktně daný. Je v něm jistý prvek konvence. Bylo by např. možné přímočaře definovat extenzi designátoru D jako jeho ekvivalenční třídu, tj. množinu všech výrazů stejného typu, které jsou s D ekvivalentní. Intenzí by pak byla L-ekvivalenční třída, tj. množina všech výrazů L-ekvivalentních s D. Tento postup by působil poněkud nepřirozeně, což je důvod, proč ho Carnap nevolí. Extenze a intenze by byly vystavěny z jazykového materiálu. Výhodou by však bylo, že by celá analýza byla proveditelná v extenzionálním metajazyce.[23] ([6], str. 19)

Krátce se zmíníme o každém typu zvolené entity. Případ predikátu působí nejpřirozenějším dojmem, zvláště co se jeho extenze týče. K intenzi doplňuje Carnap tyto neformální poznámky, které mají sloužit pouze jako terminologické vyjasnění: Tak např. množina všech lidí je totožná s množinou všech neopeřených dvojnožců, ale vlastnost býti člověkem není totožná s vlastností býti neopeřeným dvojnožcem. Identita vlastností není závislá na aktuálním stavu věcí. Vlastnost je neměnná skrze všechny stavy věcí, kdežto třída těch individuí, jimž vlastnost náleží se může měnit se změnou stavu věcí. Vlastnosti nejsou jazykové entity, neměli bychom je však chápat ani jako něco mentálního, např. jako představy či senzuální data, spíše je vhodné chápat je jako fyzikální aspekty či komponenty samotných věcí v daném stavu věcí. Rozumíme-li predikátům nějakého jazyka, znamená to, že víme, jaké vlastnosti vyjadřují. ([6], str. 18-23)

Pravdivostní hodnota jakožto extenze věty není na první pohled nijak intuitivní volba.[24] Avšak Carnap ukazuje, že při bližším přihlédnutí lze rozpoznat silnou analogii mezi pravdivostními hodnotami vět a extenzemi predikátů. Pokud bychom postupovali tak, že bychom měli přirozeně dané extenze predikátů a chtěli přistoupit k větám, mohli bychom uvažovat takto: Pro n-členný predikát je charakteristické, že k němu musíme připojit n argumentových výrazů, abychom získali větu. Samotné věty pak mohou být přirozeně chápány jako 0-členné predikáty. Máme-li dva n-členné predikáty P a Q, kdy platí, že jejich extenzemi jsou totožné možiny n-tic? To nastane, když je pravdivá věta:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \dots, x_n)).$$

Zobecněním této úvahy pro $n = 0$ dostáváme, že dvě věty φ a ψ chápané jako 0-členné predikáty mají totožnou extenzi, když

$$\varphi \leftrightarrow \psi,$$

tj. když mají stejnou pravdivostní hodnotu. ([6], str. 26)

Co se propozic týče, nejedná se – podobně jako u vlastností – o lingvistické výrazy ani o subjektivní, mentální entity. Jde spíše o něco objektivního,

[23] Definici extenzionálního jazyka, jak je podána v *Meaning and Necessity*, uvádíme níže.

[24] V logice se však tradičně pracuje s pravdivostní hodnotou tímto způsobem. Podrobné zdůvodnění před Carnapem podal Frege, viz [12], zvláště str. 44-47

co má svůj projev v přírodě. Tak jako vlastnost být černý je něco, co věc může a nemusí mít a co např. tento stůl má, tak také propozice, že tento stůl je černý, je něco, co je fakticky dáno v objektech samotných. Vynořuje se zde však potíž s nepravdivými větami. Avšak také ony jsou nějak určeny samotnými objekty, neboť to jsou komplexy, jejichž složky (např. vlastnosti a individuové pojmy) jsou v objektech realizovány. A pouze tím, jak se tyto složky skládají v celek-propozici, je určeno, zda je tato propozice pravdivá či nepravdivá. Avšak všechny tyto poznámky jsou pouze pomocné a pokud jsou více matoucí než objasňující, mohou být zcela vynechány. Propozice je jednoduše to, co vyjadřuje věta a jako kritérium identity propozic je s jistou mírou konvence zvolena L-ekvivalence (proto jsou vhodnými kandidáty na intenze). Tedy jsou-li např. φ a ψ libovolné věty systému S_1, pak věty $\neg(\varphi \wedge \psi)$ a $\neg\varphi \vee \neg\psi$ vyjadřují stejnou propozici. ([6], str. 27-32)

Extenze individuového výrazu se zdá být neproblematická. Pokud předpokládáme, že autorem románu Waverley byl Walter Scott, pak individuové výrazy $\iota x A x w$ a s mají stejnou extenzi. Je jí právě individuum Walter Scott. Avšak v jiném možném světě by mohl být autorem tohoto románu někdo jiný. Přesněji, existuje takový popis stavu, ve kterém neplatí věta Asw. Individuové výrazy $\iota x A x w$ a s mají tedy odlišnou intenzi. „Individuový pojem" je Carnapův nový termín. Jde o jakousi specifickou vlastnost – specifickou v tom, že je v ní obsaženo, že pod ni může spadat pouze jedno individuum. Tak např. Walter Scott je určité individuum, ale také individuový pojem, který se liší od individuového pojmu autor románu Waverley.[25] ([6], str. 39-42)

Nezávisle na pojmech extenze a intenze pro designátory definuje Carnap také novým způsobem, kdy je obecně nějaký celý sémantický systém extenzionální, resp. intenzionální. Klíčovou roli v této definici hraje pojem zaměnitelnosti (resp. L-zaměnitelnosti), který je založen opět pouze na pojmu ekvivalence (resp. L-ekvivalence). Následující definice se tedy vztahuje na sémantické systémy, v nichž jsou definovány tyto pojmy podobně jako v S_1. Designátor D_1 je *zaměnitelný* (resp. *L-zaměnitelný*) *za nějaký výskyt designátoru* D_2 (stejného typu) v designátoru D_3, když designátory D_3 a $D_3[D_2/D_1]$ jsou ekvivalentní (resp. L-ekvivalentní). $D_3[D_2/D_1]$ je přitom výsledek nahrazení onoho výskytu designátoru D_2 designátorem D_1 (v D_3). Designátor D_3 je *extenzionální vzhledem k nějakému výskytu designátoru* D_2 (v D_3), když

[25] Pokud v nějakém popisu stavu platí, že nikdo není autorem románu Waverley nebo že je více autorů tohoto románu, pak extenzí výrazu $\iota x A x w$ je nějaký vhodný předem zvolený objekt. Toto opatření má čistě technické důvody.

libovolný designátor D_1 ekvivalentní s D_2 je zaměnitelný za onen výskyt D_2 v D_3. Designátor D je *extenzionální*, když je extenzionální vzhledem ke všem výskytům všech designátorů v D. Sémantický systém je *extenzionální*, když každá věta tohoto systému je extenzionální. Termín „intenzionální“ již neznamená pouhý opak extenzionálního. Designátor D_3 je *intenzionální vzhledem k nějakému výskytu designátoru* D_2 (v D_3), když vzhledem k němu není extenzionální a libovolný designátor D_1 L-ekvivalentní s D_2 je L-zaměnitelný za onen výskyt D_2 v D_3. Designátor D je *intenzionální*, když vzhledem ke všem výskytům všech designátorů v D je extenzionální nebo intenzionální a alespoň vzhledem k jednomu je intenzionální. Sémantický systém je *intnzionální*, když každá věta tohoto systému je buď extenzionální, nebo intenzionální a alespoň jedna věta je intenzionální. ([6], str. 48)

Systém S_1 je podle této definice extenzionální. Avšak systémy obsahující modality jsou obvykle intenzionální. Předpokládáme-li totiž, že je nějaká věta pravdivá nutně, neznamená to obvykle, že každá pravdivá věta je pravdivá nutně. Na druhou stranu Carnap předpokládá, že podmínka L-zaměnitelnosti by měla pro modality platit: Je-li nějaká věta nutně pravdivá, je také nutně pravdivá každá věta, která je s ní L-ekvivalentní. Intenzionalita je tedy podstatným rysem modalit.

Závěrem zmíníme, že ani podmínka L-ekvivalence není ve všech kontextech dostatečně silná. Snaha zachytit některé části přirozeného jazyka může lehce vést k vytvoření sémantického systému, v němž existují věty, které ztrácejí svoji pravdivost nahrazením nějaké dílčí věty větou L-ekvivalentní. Takové věty (a tedy i systémy, které je obsahují) nejsou ani extenzionální, ani intenzionální. Typickým příkladem jsou tzv. „belief-sentences“. Řekněme, že máme sémantický systém S rozšiřující systém S_1 o nějaké pokročilejší partie matematiky a navíc o operátor B_J, jehož překladem je fráze „John věří, že ...“. V tomto systému při vhodných sémantických pravidlech je libovolná pravdivá matematická věta φ L-pravdivá. Protože je L-pravdivá také věta $Hs \vee \neg Hs$, je tato věta L-ekvivalentní s větou φ. Bylo by přirozené, aby věta $B_J(Hs \vee \neg Hs)$ byla pravdivá. Přitom, vyjadřuje-li φ nějakou velmi složitou (třeba zatím nerozhodnutou) matematickou propozici, nemusela by být pravdivá věta $B_J\varphi$. Podmínka extenzionality i intenzionality by pak byla pro tento systém porušena. ([6], str. 53, 54)

Za tímto účelem zavádí Carnap třetí vrstvu významu, která je vymezena pomocí tzv. *intenzionálního izomorfismu*. Intenzionálně izomorfní jsou např. každé dvě odpovídající si formule výrokové logiky, z nichž jedna je zapsána v naší a druhá v polské notaci. Jiným příkladem jsou výrazy:

$2 + 5 > 3,$

$Gr[sum(II, V), III],$

pokud předpokládáme, že římské číslice odpovídají arabským běžným způsobem, výraz Gr odpovídá výrazu $>$ a výraz sum odpovídá výrazu $+$. Bez přesné definice můžeme uvést, že dva designátory jsou intenzionálně izomorfní, když jsou vystavěny analogickým způsobem z L-ekvivalentních nesložených designátorů. V belief-sentences se sice nedají bez újmy na pravdivostní hodnotě celku zaměňovat L-ekvivalentní věty, ale dají se takto zaměňovat intenzionálně izomorfní věty. Tyto kontexty se tedy týkají této úrovně významu. ([6], str. 56-59)

3.2 Modality v *Meaning and Necessity*

Obohacením sémantického systému S_1 o modální operátor nutnosti ($\Box$)[26] je zaveden modální sémantický systém S_2. Důležité pravidlo pravdivosti, které je do S_2 přidáno, zní takto:

Věta $\Box\varphi$ je pravdivá iff věta φ je L-pravdivá.

Stejné pravidlo je zavedeno jakožto pravidlo oborů:

Věta $\Box\varphi$ platí v daném popisu stavu iff φ je L-pravdivá.

Sémantiku, kterou jsme tím získali, můžeme tedy nazvat sémantikou možných světů, neboť nutně pravdivé zde znamená pravdivé ve všech možných světech (modelovaných jako popisy stavů). Tato sémantika měla posloužit jako jedno z možných kritérií pro posouzení, které věty v modálním jazyce jsou logicky platné. V dřívější syntaktické fázi vývoje moderní modální logiky nebylo k dispozici žádné přesně vymezené kritérium tohoto typu. Logici se přeli v otázkách, který axiom je intuitivně přijatelný a který nikoli. Nebyla tu však žádná společná báze, na základě které by tyto otázky mohly být rozhodnuty. Zde však je podáno ktritérium a základ pro precizní zdůvodnění přijetí či zamítnutí nějaké logické formule. Jak např. rozhodnout otázku, že axiom (4), tj. schéma $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, má být uznán jako korektní? Jeho dřívější zavedení bylo motivováno čistě technicky. Lewis vytvořil systém $S4$ (obsahující tento axiom) na základě toho, že Becker ukázal, jak s jeho pomocí redukovat

[26]V původní Carnapově notaci je operátor nutnosti značen symbolem „N“.

řetězce modalit. Carnap svojí sémantikou však podal mnohem významnější zdůvodnění: Předpokládáme-li, že věta $\Box\varphi$ je pravdivá, znamená to, že věta φ je L-pravdivá, tj. pravdivá čistě na základě sémantických pravidel, bez ohledu na mimojazykou skutečnost. Ale to, že je věta φ L-pravdivá, je určeno také pouze na základě sémantických pravidel. Tedy věta $\Box\varphi$ je nejen pravdivá, ale i L-pravdivá. To znamená, že věta $\Box\Box\varphi$ je pravdivá. Máme zde tedy sémantické zdůvodnění axiomu (4). ([6], str. 174)

Podobným způsobem lze podat zdůvodnění všech axiomů a odvozovacích pravidel modální logiky $S5$ a sémanticky zdůvodnit existenci právě šesti neekvivalentních modalit, jejichž výčet podal Becker (viz kapitola 2.3). Carnap však také zdůrazňuje, že mnoho sporů týkajících se modálních axiomů vzniklo na základě určité víceznačnosti pojmu nutnosti. Je možné ho explikovat různými neekvivalentními způsoby. Carnap podává jen jeden z nich.

Systém S_2 je podle očekávání intenzionální. Designátory tohoto systému by měly být (alespoň v těch kontextech, kde jsou v dosahu nějaké modality) překládány do metajazyka v intenzionální terminologii, což objasníme na příkladu. Metajazykový termín „ekvivalentní“ může být za tímto účelem rozšířen i na překlady designátorů. Carnap přijímá tuto konvenci: ([6], str. 25)

> Pokud jsou dva designátory ekvivalentní (v S_1), potom řekneme, že jejich extenze jsou identické a jejich intenze jsou ekvivalentní.
>
> Pokud jsou dva designátory L-ekvivalentní (v S_1), potom řekneme, že jejich intenze jsou identické.

Součástí systému S_1 (a tedy i v S_2) jsou predikáty F a B, pro něž jsou zadána tato pravidla označování:

> Výraz Fx systému S_1 je překladem českého výrazu „x je neopeřený“.
>
> Výraz Bx systému S_1 je překladem českého výrazu „x je dvounohý živočich“.

Nyní můžeme posoudit věty:

a) $\forall x(\lambda x(Fx \wedge Bx)x \leftrightarrow Hx)$,

b) $\neg\Box\forall x(\lambda x(Fx \wedge Bx)x \leftrightarrow Hx)$.

Větu a), která neobsahuje modality, můžeme korektně přeložit do metajazyka třemi způsoby – neutrálně, intenzionálně či extenzionálně:

a)^n Pro každé x platí, že x je neopeřeným dvounohým živočichem právě tehdy, když x je člověkem.

a)^i Vlastnost být neopeřeným dvounohým živočichem je ekvivalentní s vlastností být člověkem.

a)^e Množina neopeřených dvounohých živočichů je identická s množinou lidí.

První z těchto vět je nejednoznačná (nikoli však nekorektní), druhá a třetí věta je jednoznačná a (v našem metajazyce) pravdivá.

Věta b) je též pravdivá (dokonce L-pravdivá). Je zde na místě překlad v intenzionální terminologii:

b)^i Vlastnost být neopeřeným dvounohým živočichem není identická s vlastností být člověkem.

Též v pořádku je neutrální překlad:

b)^n Není nutné, že pro každé x platí, že x je neopeřeným dvounohým živočichem právě tehdy, když x je člověkem.

Extenzionální překlad již je problematický:

b)^e Není nutné, že množina neopeřených dvounohých živočichů je totožná s množinou lidí.

Otázkou je, zda tuto větu vůbec přijmout jako smysluplně utvořenou. Pokud ano a pokud chceme dokonce hájit její pravdivost, hrozí nám určité nebezpečí. Po substituci výrazu „množina lidí“ za výraz „množina neopeřených dvounohých živočichů“ získáváme nepravdivou větu:

b)^e Není nutné, že množina lidí je totožná s množinou lidí.

Podobné příklady Carnap uvádí pro všechny typy designátorů systému S_1 ([6], str. 186-191). Zdá se tedy, že bychom se v modálních kontextech měli držet především intenzionálního způsobu překladu.

V S_2 se objevují určité technické potíže s proměnnými. Hodnoty proměnných by měly být intenze. Např. kdybychom v systému měli výrokové proměnné, vyjadřovala by věta $\exists p \neg \Box p$ to, že existuje propozice, která není nutná – nikoli to, že existuje pravdivostní hodnota, která není nutná. V jazyce S_2 však máme pouze individuové proměnné. Jejich hodnoty by měly být individuové pojmy (nikoli individua). Tyto pojmy mohou být modelovány jako funkce z popisů stavů do množiny individuí (či – jak to dělá Carnap – do nějaké úplné množiny individuových konstant, např. do množiny číslovek místo do množiny čísel). Vzhledem k těmto funkcím je třeba definovat nová, komplikovanější pravidla oborů pro systém S_2 (viz [6], str. 182-184). V nich se zohlední také neuzavřené věty, tj. věty s volnými proměnnými (které v S_1 za věty nebyly považovány). Nebudeme uvádět Carnapovu původní formulaci zatíženou navíc substituční strategií. Budeme se dále zabývat především výrokovou verzí Carnapovy modální logiky. Sémantiku její predikátové verze zformulujeme v závěru příští kapitoly – avšak ve stylu, v jakém se to dělá v současnosti.

3.3 Formální aspekty logiky C

Jak již bylo naznačeno, Carnapova logika, která dnes bývá označena písmenem „C“, obsahuje všechny formule dokazatelné v $S5$. Avšak jak záhy uvidíme, není tomu tak, že by tyto dvě logiky zcela korespondovaly. Někteří autoři upozorňují na to, že odlišnost C a $S5$ bývá v literatuře často opomíjena (např. [14], str. 111, či [32], str. 1, 4). Poukazují především na expozici Carnapovy modální logiky *Carnap on Modalities*, jejíž autorem je Robert Feys. Zdá se, že v tomto článku Feys chybně zcela ztotožňuje Carnapovu logiku s $S5$ ([11], str. 286). V naší literatuře se podobné ztotožnění objevuje v Běhounkově práci [2] na str. 62. Důvodem budou zřejmě silné vztahy, které mezi těmito logikami existují a kterým se nyní budeme věnovat.

Začneme s výrokovou verzí logiky C. Při výkladu a dokazování budeme nejprve postupovat podle [14], kde se připravuje půda pro předvedení jednoho ze vztahů k logice $S5$ tím, že se definuje sémantika modalit obecnějším způsobem, než jak to původně učinil Carnap.

Pracujeme tedy s jazykem modální výrokové logiky. Máme k dispozici spočetnou množinu atomů $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$. $At(\varphi)$ je množina atomů vyskytujících se ve φ. Základní spojky jsou $\neg, \wedge, \Box$, ostatní jsou definované běžným způsobem. Použijeme zjednodušenou definici popisu stavu. *Popis stavu* je libovolná množina atomů. Induktivně definujeme relaci $\Vdash$. Nechť Δ je neprázdná množina popisů stavů a $s \in \Delta$.

$\Delta, s \Vdash p$ iff $p \in s$, pro každé $p \in At$,

$\Delta, s \Vdash \varphi \wedge \psi$ iff $\Delta, s \Vdash \varphi$ a $\Delta, s \Vdash \psi$,

$\Delta, s \Vdash \neg\varphi$ iff $\Delta, s \nVdash \varphi$,

$\Delta, s \Vdash \Box\varphi$ iff pro každé $t \in \Delta$ platí $\Delta, t \Vdash \varphi$.

Řekneme, že φ je Δ-platná, když pro každé $t \in \Delta$ platí $\Delta, t \Vdash \varphi$. Sémantiku Carnapovy modální výrokové logiky C získáme tak, že za Δ položíme množinu všech popisů stavů. Tuto množinu označíme Δ_C.

Obecně zde máme $2^{2^{\aleph_0}}$ Δ-logik. Žádná z těchto logik není uzavřená na substituci. Pokud Δ obsahuje alespoň jeden popis stavu, který je neprázdný, vybereme z něj nějaký atom p. Pak formule $\Diamond p$ je Δ-platná. Přitom formule $\Diamond(p \wedge \neg p)$ není Δ-platná. Pokud Δ obsahuje pouze prázdný popis stavu, úvahu lze lehce upravit. Protože C je speciální Δ-logika, také ona není uzavřena na substituci. Z toho již je patrné, že to není logika odpovídající logice $S5$, neboť $S5$ na substituci uzavřena je (jak je patrné z jejího axiomatického vymezení).

Je-li $n \geq 1$ přirozené číslo a $s \in \Delta$, pak ξ_s^n je formule $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, kde l_i $(1 \leq i \leq n)$ je atom p_i, pokud $p_i \in s$, jinak l_i je formule $\neg p_i$. Dále pro každé Δ definujeme množiny formulí:

$$H^n = \{\xi_s^n; s \in \Delta_C\},$$

$$H_\Delta^n = \{\xi \in H^n; \exists t \in \Delta : \Delta, t \Vdash \xi\},$$

$$H_{-\Delta}^n = H^n - H_\Delta^n.$$

Každá z těchto tří množin je konečná.

Přejdeme k axiomatizaci Δ-logik. Pro každou Δ-logiku vezmeme kalkul logiky $S5$ a obohatíme ho o následující schémata:

(Δ1) $\Diamond\xi_s^n$, je-li $n \geq 1$ a $s \in \Delta$,

(Δ2) $\neg\Diamond\xi_s^n$, pokud $\Diamond\xi_s^n$ není instance (Δ1).

$\vdash_\Delta \varphi$ znamená, že formule φ je dokazatelná v tomto kalkulu.

Každá z takto získaných logik je tedy silnější než $S5$. Nejedná se o logické kalkuly v běžném smyslu. V některých případech není množina axiomů rozhodnutelná. V případě Δ_C se však jedná o rozhodnutelnou množinu – zde dokonce vystačíme pouze se schématem (Δ1), protože každá formule tvaru $\Diamond\xi_s^n$ splňuje uvedenou podmínku. Dokážeme, že ke každé Δ-logice je odpovídající Δ-kalkul adekvátní. Fixujeme tedy libovolné Δ.

Lemma 3.3.1 *Pro libovolné $\varphi, \psi, \chi \in Fle(MVL)$ platí:*

a) Jestliže $\vdash_\Delta \Box(\varphi \vee \psi)$ a $\vdash_\Delta \neg\Diamond\varphi$, pak $\vdash_\Delta \Box\psi$.

b) Jestliže $\vdash_\Delta \Box(\varphi \vee \psi)$, $\vdash_\Delta \varphi \to \chi$ a $\vdash_\Delta \psi \to \chi$, pak $\vdash_\Delta \Box\chi$.

c) Jestliže $\vdash_\Delta \varphi \to \psi$, pak $\vdash_\Delta \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$.

d) $\vdash_\Delta \Diamond\Box\varphi \to \varphi$.

Důkaz: Jde o metateorémy pravdivé již pro logiku $S5$. Jejich pravdivost se jednoduše přenáší do všech Δ-kalkulů. Q.E.D.

Budeme předpokládat, že $H^n_\Delta = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ a $H^n_{-\Delta} = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$.

Lemma 3.3.2 $\vdash_\Delta \Box(\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k)$.

Důkaz: Formule $\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k \vee \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_m$ je klasická tautologie a tedy dokazatelná v Δ-kalkulu. Tedy díky pravidlu necesitace $\vdash_\Delta \Box(\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k \vee \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_m)$. Avšak pro každou formuli $\delta \in H^n_{-\Delta}$ platí díky schématu ($\Delta 2$), že $\vdash_\Delta \neg\Diamond\delta$. Tudíž díky bodu a) z předchozího lemmatu získáváme $\vdash_\Delta \Box(\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k)$. Q.E.D.

Lemma 3.3.3 *Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$, $n = max\{m; p_m \in At(\varphi)\}$, $s \in \Delta$. Pak $\vdash_\Delta \xi^n_s \to \varphi$ iff $\Delta, s \Vdash \varphi$.*

Důkaz: Indukcí podle složitosti φ. Případ atomických formulí a spojek konjunkce a negace je přímočarý. Ukážeme indukční krok pro $\Box$. Nechť tedy $\varphi = \Box\psi$ a tvrzení platí pro formuli ψ a pro každé $t \in \Delta$.

Nechť $\Delta, s \Vdash \Box\psi$. Pak dle indukčního předpokladu platí $\vdash_\Delta \gamma_1 \to \psi, \ldots,$ $\vdash_\Delta \gamma_k \to \psi$. Tedy díky druhému lammatu a bodu b) prvního lemmatu platí $\vdash_\Delta \Box\psi$. Tedy také $\vdash_\Delta \xi^n_s \to \Box\psi$.

Nechť $\vdash_\Delta \xi^n_s \to \Box\psi$. Podle bodu c) prvního lemmatu $\vdash_\Delta \Diamond\xi^n_s \to \Diamond\Box\psi$. Podle schématu ($\Delta 1$) je $\Diamond\xi^n_s$ axiom, tedy $\vdash_\Delta \Diamond\Box\psi$. Z bodu d) prvního lemmatu dostáváme $\vdash_\Delta \psi$. Nechť $t \in \Delta$. Pak $\vdash_\Delta \xi^n_t \to \psi$. Díky indukčnímu předpokladu platí $\Delta, t \Vdash \psi$. Protože t bylo libovolné, platí $\Delta, s \Vdash \Box\psi$. Q.E.D.

Věta 3.3.1 *Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$. Platí, že φ je Δ-platná iff $\vdash_\Delta \varphi$.*

Důkaz: Nechť nejprve $\vdash_\Delta \varphi$. Ověřením korektnosti všech schémat a odvozovacích pravidel získáváme také, že φ je Δ-platná.

Nechť φ je Δ-platná. Tedy pro každé $t \in \Delta$ platí $\Delta, t \Vdash \varphi$. Tedy podle třetího lemmatu $\vdash_\Delta \gamma_1 \to \varphi, \ldots, \vdash_\Delta \gamma_k \to \varphi$. Tedy podle druhého lemmatu a bodu b) prvního lemmatu $\vdash_\Delta \Box\varphi$, tedy i $\vdash_\Delta \varphi$. Q.E.D.

Máme nyní axiomatický systém pro každou Δ-logiku. Speciálně máme axiomatizaci logiky C. Za pomoci Δ-logik je v čánku [14] vytvořena sémantika pro logiku $S5$. Než vyložíme, jak autoři postupovali, doplníme jedno pomocné tvrzení, které v [14] není explicitně zmíněno, ale které je v postupu přesto použito. Domníváme se, že je vhodné uvést jeho důkaz, protože tento bod může být matoucí. Mohlo by se totiž zdát, že autoři předpokládají větu o dedukci pro logiku $S5$, která zde však ve své obecné podobě neplatí. Pravdou je, že jim pro účely důkazu stačí pouze určitá omezená varianta věty o dedukci, která již platí a kterou zformulujeme v následujícím lemmatu.

Lemma 3.3.4 *Nechť Δ je dáno, $\varphi \in Fle(MVL)$ a platí $\vdash_\Delta \varphi$. Nechť navíc $\chi_1, \ldots, \chi_n$ jsou jediné instance schémat* ($\Delta1$) *a* ($\Delta2$)*, které se vyskytují v nějakém Δ-důkazu formule φ. Pak platí $\vdash_{S5} (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \to \varphi$.*

Důkaz: Tvrzení lze dokázat podobně jako větu o dedukci v klasické výrokové logice. Nechť posloupnost $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m = \varphi$ je uvedený důkaz. Dokážeme indukcí, že pro každé i $(1 \leq i \leq m)$ platí $\vdash_{S5} (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \to \vartheta_i$. Mohou nastat čtyři případy:

i) ϑ_i je axiom logiky $S5$.

ii) ϑ_i je instance schématu ($\Delta1$) nebo ($\Delta2$).

iii) ϑ_i je odvozena z předchozích členů pomocí pravidla modus ponens.

iv) ϑ_i je odvozena z některého předchozího členu pomocí necesitace.

V případech i) a iii) lze postupovat stejně jako v tradičním důkazu věty o dedukci pro klasickou výrokovou logiku – tj. využije se toho, že schémata $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ a $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ jsou tautologie. V případě ii) lze využít faktu, že $\vartheta_i \in \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$. Zbývá zdůvodnit případ iv). Zde využijeme, že pro každou instanci χ schémat ($\Delta1$) a ($\Delta2$) platí $\vdash_{S5} \chi \to \Box\chi$. Tedy

$$\vdash_{S5} (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \rightarrow (\Box\chi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\chi_n).$$

Přitom v $S5$ platí, že vzhledem ke konjunkci lze nutnost vytknout, tj.

$$\vdash_{S5} (\Box\chi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\chi_n) \rightarrow \Box(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n).$$

Nechť $\vartheta_i = \Box\vartheta_j$ pro nějaké $j < i$. Pak na základě indukčního předpokladu platí

$$\vdash_{S5} (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \rightarrow \vartheta_j.$$

Aplikací necesitace, schématu (K) a pravidla modus ponens získáváme

$$\vdash_{S5} \Box(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \rightarrow \Box\vartheta_j.$$

A z výše uvedeného plyne, že

$$\vdash_{S5} (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \rightarrow \Box\vartheta_j.$$

Tím je důkaz dokončen. Q.E.D.

Nyní již můžeme uvést sémantickou souvislost logik C a $S5$ tak, jak je předložena v [14].

Věta 3.3.2 *Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$. Pak $\vdash_{S5} \varphi$ iff pro každé Δ je φ Δ-platná.*

Důkaz: Jestliže $\vdash_{S5} \varphi$, pak pro každé Δ platí $\vdash_{\Delta} \varphi$, tedy také pro každé Δ je φ Δ-platná.

Nechť pro každé Δ je φ Δ-platná. Pak podle předchozí věty pro každé Δ platí $\vdash_{\Delta} \varphi$. Z předchozího postupu je zřejmé, že v důkazu formule φ v odpovídajícím Δ-kalkulu není potřeba použít žádný atom, jehož index by byl větší než jakýkoli index atomů vyskytujících se ve formuli φ. Nechť tedy $n = max\,\{m; p_m \in At(\varphi)\}$. Pro každé Δ existuje přesně 2^n formulí určených schématy $(\Delta1), (\Delta2)$. Nechť $\Diamond\alpha_1^{\Delta}, \ldots, \Diamond\alpha_i^{\Delta}$ $(1 \leq i \leq 2^n)$ jsou ty axiomy, které jsou určeny schématem $(\Delta1)$ a $\neg\Diamond\beta_1^{\Delta}, \ldots, \neg\Diamond\beta_j^{\Delta}$ $(j = 2^n - i)$ jsou ty axiomy, které jsou určeny schématem $(\Delta2)$. Při důkazu formule φ v Δ-kalkulu nebyly tedy zapotřebí další axiomy než právě uvedené. Tedy platí (dle předchozího lemmatu), že $\vdash_{S5} (\Diamond\alpha_1^{\Delta} \wedge \ldots \wedge \Diamond\alpha_i^{\Delta} \wedge \neg\Diamond\beta_1^{\Delta} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\beta_j^{\Delta}) \rightarrow \varphi$. Existuje přesně $m = 2^{2^n} - 1$ formulí typu $\Diamond\alpha_1^{\Delta} \wedge \ldots \wedge \Diamond\alpha_i^{\Delta} \wedge \neg\Diamond\beta_1^{\Delta} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\beta_j^{\Delta}$. Nechť to jsou formule $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Platí tedy pro každé l $(1 \leq l \leq m)$, že $\vdash_{S5} \psi_l \rightarrow \varphi$. Přitom také $\vdash_{S5} \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$. Tedy $\vdash_{S5} \varphi$. Q.E.D.

Analogický výsledek (pro predikátovou verzi logiky $S5$) předvedl poprvé Saul Kripke v roce 1959 v článku [18]. Vrátíme se však nyní k logice C. Steven H. Thomason pro ni podal v článku [33] alternativní a jednodušší kalkul než ten, s kterým jsme dosud pracovali. Mezi axiomy jsou pouze všechny formule tvaru klasických tautologií a dále všechny instance schématu ($\Delta_C 1$). Odvozovací pravidla jsou modus ponens, necesitace a dále je přidáno následující pravidlo:[27]

$c+ \ \varphi \to \psi / \ \Box\varphi \to \Box\psi.$

Je-li φ dokazatelná v tomto kalkulu, píšeme $\vdash_C \varphi$. Pro tento kalkul můžeme ihned dokázat analogii třetího lemmatu. Využijeme také následující úvahy. O popisu stavu řekneme, že je n-popisem, když neobsahuje žádný atom s větším indexem než n. Pokud n je maximální index ve φ, pak se lze při vyhodnocování formule φ v logice C omezit pouze na všechny n-popisy. Formule φ platí ve všech n-popisech právě tehdy, když je v C logicky platná, z čehož plyne také rozhodnutelnost této logiky. Řekněme, že Δ_C^n je množina všech n-popisů. Pro důkaz bude vhodné, vyjádříme-li analogii třetího lemmatu pomocí následujícího značení. Nechť $s \in \Delta_C^n$. Pak je-li $\Delta_C^n, s \Vdash \varphi$, je $\varphi^s = \varphi$. Jinak je $\varphi^s = \neg\varphi$. Platí následující tvrzení.

Lemma 3.3.5 *Nechť* $\varphi \in Fle(MVL)$, $n = max\{m; p_m \in At(\varphi)\}$ *a* $s \in \Delta_C^n$. *Pak* $\vdash_C \xi_s^n \to \varphi^s$.

Důkaz: Indukcí podle složitosti formule φ. Ukážeme pouze indukční krok pro operátor $\Box$. Nechť tedy $\varphi = \Box\psi$.

Jestliže $\Delta_C^n, s \Vdash \Box\psi$, tak pro každé $t \in \Delta_C^n$ je $\Delta_C^n, t \Vdash \psi$. Dle indukčního předpokladu $\vdash_C \xi_t^n \to \psi$ pro každé takovéto t. Přitom $\bigvee_{t \in \Delta_C^n} \xi_t^n$ je klasická tautologie. Pak ale platí $\vdash_C \psi$. Tedy i $\vdash_C \Box\psi$. A tedy také $\vdash_C \xi_s^n \to \Box\psi$.

Jestliže $\Delta_C^n, s \nVdash \Box\psi$, pak existuje $t \in \Delta_C^n$ tak, že $\Delta_C^n, t \nVdash \psi$. Tedy dle indukčního předpokladu pro takovéto t platí $\vdash_C \xi_t^n \to \neg\psi$. Tedy také $\vdash_C \Diamond\xi_t^n \to \neg\Box\psi$. Avšak $\Diamond\xi_t^n$ je axiom, takže $\vdash_C \neg\Box\psi$. Tedy i $\vdash_C \xi_s^n \to \neg\Box\psi$. Q.E.D.

Věta 3.3.3 *Nechť* $\varphi \in Fle(MVL)$. φ *je platná v* C *iff* $\vdash_C \varphi$.

[27] Toto pravidlo je ekvivalentní s podmínkou vyjádřenou v bodu c) prvního lemmatu.

Důkaz: Všechny axiomy jsou v C platné a odvozovací pravidla zde zachovávají platnost. Tím je dokázána korektnost.

Nechť φ je platná v C. Pak podle předchozího lemmatu platí pro každé $t \in \Delta_C^n$, že $\vdash_C \xi_t^n \to \varphi$ a také platí $\vdash_C \bigvee_{t \in \Delta_C^n} \xi_t^n$. Tedy $\vdash_C \varphi$. Q.E.D.

Thomason [33] podává s pomocí právě uvedeného kalkulu následující charakterizaci logiky C. $Thm(C)$ je množina formulí platných v logice C.

Věta 3.3.4 *$Thm(C)$ je jediná množina X formulí jazyka modální výrokové logiky, která splňuje pro libovolné $\varphi, \psi, \chi \in Fle(MVL)$ následující podmínky:*

1. *Pokud je φ tvaru klasické tautologie, pak $\varphi \in X$.*
2. *Pokud φ neobsahuje modality a $\varphi \in X$, pak je φ tvaru klasické tautologie.*
3. *Pokud $\varphi \to \psi \in X$ a $\varphi \in X$, pak $\psi \in X$.*
4. *$\varphi \in X$ právě tehdy, když $\Box\varphi \in X$.*
5. *Buď $\varphi \in X$, nebo $\neg\Box\varphi \in X$.*

Důkaz: Sémantickou kontrolou lze ověřit, že pro $Thm(C)$ jsou splněny všechny z uvedených podmínek. Předpokládejme, že množina X splňuje uvedené podmínky. Z podmínek 1., 2. a 5. plyne, že X obsahuje všechny axiomy uvedeného kalkulu. Díky podmínkám 3. a 4. je X uzavřená na modus ponens a necesitaci. Indukcí lze ověřit, že kdykoli ve formuli α je každý atom v dosahu nějakého modálního operátoru, pak platí buď $\alpha \in X$, nebo $\neg\alpha \in X$ (pro žádnou formuli neplatí obojí). Tedy jestliže $\Box\varphi \to \Box\psi \notin X$, pak $\varphi \in X$ a $\psi \notin X$. Tedy $\varphi \to \psi \notin X$. To znamená, že X je uzavřena i na $c+$. Dohromady tedy $Thm(C) \subseteq X$. Nechť $\varphi \in X$. Pak také $\Box\varphi \in X$, tedy $\neg\Box\varphi \notin X$. Z toho plyne, že neplatí $\vdash_C \neg\Box\varphi$. Tedy $\vdash_C \varphi$. Tudíž $Thm(C) = X$. Q.E.D.

Výše jsme ukázali, jaký je sémantický vztah logiky $S5$ ke Carnapově modální logice C. Modalita nutnosti je v obou chápána jako platnost ve všech možných světech. Logika C je logikou jednoho modelu skutečně všech možných světů popsatelných v daném jazyce. Naproti tomu logika $S5$ je logikou určité třídy modelů. A modely této třídy jsou tvořeny libovolnými množinami možných světů popsatelných v daném jazyce.

Nyní předvedeme syntaktický vztah logik $S5$ a C. Ukážeme, že v $S5$ jsou platné přesně ty formule, které jsou platné v C a jejichž všechny substituční instance jsou též platné v C. V důkazu budeme postupovat stále podle Thomasonova článku [33].

Nechť $G = \{p_1, \ldots, p_n\}$ a $Int(G)$ je množina všech ohodnocení těchto atomů. Uvedeme nyní pomocné lemma. Definujeme $\varphi^1 = \varphi$ a $\varphi^0 = \neg\varphi$.

Lemma 3.3.6 *Nechť $K \subseteq Int(G)$ a K je neprázdná. Pak existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ splňující následující podmínky:*

1. *$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ obsahují pouze atomy $p_1, \ldots, p_n$ a spojky $\neg$ a $\wedge$.*
2. *Pro každé $I \in K$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $I(\alpha_i) = I(p_i)$.*
3. *Pro každé $I \notin K$ platí $\vdash_C \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i^{I(p_i)}$.*

Důkaz: Fixujeme libovolné $I_0 \in K$. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ definujeme funkci $f_i : Int(G) \to \{0, 1\}$:

$f_i(I) = I(p_i)$, jestliže $I \in K$.

$f_i(I) = I_0(p_i)$, jestliže $I \notin K$.

Protože $\{\wedge, \neg\}$ je úplná množina spojek v klasické logice, k funkcím $f_1, \ldots, f_n$ existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které splňují 1. podmínku a pro něž platí:

$I(\alpha_i) = f_i(I)$.

Jestliže $I \in K$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak $I(\alpha_i) = f_i(I) = I(p_i)$. Tedy 2. podmínka je také pro tyto formule splněna.

Nechť $I \notin K$ a $J \in Int(G)$. Nejprve dokážeme sporem, že pak pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $J(\alpha_i) \neq I(p_i)$. Předpokládejme tedy, že pro každé i platí $J(\alpha_i) = I(p_i)$. Pokud $J \in K$, pak pro každé i máme $J(p_i) = f_i(J) = J(\alpha_i) = I(p_i)$. Tedy $J = I$, což je spor, neboť $I \notin K$. Pokud $J \notin K$, pak pro každé i platí $I_0(p_i) = f_i(J) = J(\alpha_i) = I(p_i)$. Tedy $I = I_0$, což je opět spor.

Lze lehce ověřit, že platí následující vztah:

$J(\alpha_i^{I(p_i)}) = 1$ iff $I(p_i) = J(\alpha_i)$.

Dohromady získáváme, že pro každé $J \in Int(G)$ platí, že $J(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i^{I(p_i)}) = 0$. Tedy $\vdash_C \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i^{I(p_i)}$ a 3. podmínka je rovněž splněna. Q.E.D.

Každou substituci můžeme pojmout jako funkci $sub : At \rightarrow Fle(MVL)$. Sub je množina všech takovýchto substitucí. Každou $sub \in Sub$ můžeme rozšířit přirozeným způsobem tak, že $sub : Fle(MVL) \rightarrow Fle(MVL)$, přičemž pro libovolnou $\varphi \in Fle(MVL)$ neobsahující jiné atomy než $p_1, \ldots, p_n$ dodefinujeme $sub(\varphi) = \varphi(p_1/sub(p_1), \ldots, p_n/sub(p_n))$, tj. $sub(\varphi)$ je formule, kterou získáme současným nahrazením všech atomů formulemi, které jim přiřazuje funkce sub.

Každé neprázdné množině $K \subseteq Int(G)$ odpovídá množina popisů stavů $\Delta_K \subseteq \Delta_C^n$. Dále sub_K bude substituce taková, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $sub_K(p_i) = \alpha_i$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou formule, jejichž existenci pro dané K zajišťuje předchozí lemma.

Lemma 3.3.7 *Nechť $K \subseteq Int(G)$, $s \in \Delta_K$ a $\varphi \in Fle(MVL)$. Pak platí, že $\Delta_K, s \Vdash \varphi$ iff $\Delta_C^n, s \Vdash sub_K(\varphi)$.*

Důkaz: Indukcí podle složitosti formule φ. Pro každý atom p_i ($1 \leq i \leq n$) platí $\Delta_K, s \Vdash p_i$ iff $\Delta_C^n, s \Vdash p_i$ iff $\Delta_C^n, s \Vdash \alpha_i$ (viz 2. podmínka předchozího lemmatu).

Indukční kroky pro $\wedge$ a $\neg$ jsou přímočaré. Nechť $\varphi = \Box\psi$. Předpokládejme, že platí $\Delta_C^n, s \Vdash sub_K(\Box\psi)$. Pak (protože $\Delta_K \subseteq \Delta_C^n$) pro každé $t \in \Delta_K$ platí $\Delta_C^n, t \Vdash sub_K(\psi)$. Na základě indukčního předpokladu platí pro každé $t \in \Delta_K$, že $\Delta_K, t \Vdash \psi$. Tedy $\Delta_K, s \Vdash \Box\psi$.

Nechť $\Delta_C^n, s \nVdash sub_K(\Box\psi)$. Pak existuje $t \in \Delta_C^n$ tak, že $\Delta_C^n, t \nVdash sub_K(\psi)$. Definujeme $I \in Int(G)$ tak, že $I(p_i) = 1$ iff $\Delta_C^n, t \Vdash \alpha_i$. Z toho vyplývá, že platí $\Delta_C^n, t \Vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i^{I(p_i)}$. Nyní platí, že $I \in K$. Kdyby ne, tak by na základě 3. podmínky předchozího lemmatu platilo, že $\Delta_C^n, t \nVdash \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i^{I(p_i)}$, což by byl spor. Protože $I \in K$, I koresponduje s popisem stavu $s_I \in \Delta_K$. Pro každé i platí:

$$\Delta_C^n, s_I \Vdash \alpha_i \text{ iff } \Delta_C^n, s_I \Vdash p_i \text{ iff } \Delta_C^n, t \Vdash \alpha_i.$$

Protože $\Delta_C^n, t \nVdash sub_K(\psi)$, také $\Delta_C^n, s_I \nVdash sub_K(\psi)$. Na základě indukčního předpokladu tedy platí $\Delta_K, s_I \nVdash \psi$. Tedy $\Delta_K, s \nVdash \Box\psi$. Q.E.D.

Nyní můžeme dokázat zmíněný významný vztah logik C a $S5$. Využijeme pozorování, že není-li φ platná v logice $S5$, pak existuje $\Delta_K \subseteq \Delta_C^n$

(kde n je maximální index ve φ) tak, že φ není platná v Δ_K.[28] Označíme $Sub(C) = \{\varphi \in Thm(C); \forall sub \in Sub : sub(\varphi) \in Thm(C)\}$. $Thm(S5)$ je pochopitelně množina teorémů logiky $S5$.

Věta 3.3.5 $Sub(C) = Thm(S5)$.

Důkaz: Jestliže $\varphi \in Thm(S5)$, pak $\varphi \in Thm(C)$ a pro každou substituci $sub \in Sub$ je $sub(\varphi) \in Thm(S5)$ a tedy i $sub(\varphi) \in Thm(C)$. Takže $\varphi \in Sub(C)$.

Nechť $\varphi \notin Thm(S5)$. Pak existuje $K \subseteq Int(G)$ a $s \in \Delta_K$ tak, že $\Delta_K, s \not\Vdash \varphi$. Tedy podle předchozího lemmatu $\Delta_C^n, s \not\Vdash sub_K(\varphi)$. Tedy $\varphi \notin Sub(C)$. Q.E.D.

Uvedený výsledek dokázal již Carnap ve svém článku *Modalities and Quantification* (1946), ve kterém se věnoval formálním vlastnostem své modální logiky. Zde stejně jako v *Meaning and necessity* definuje L-pravdivost pro predikátovou logiku tak, že obor dané formule obsahuje všechny popisy stavů ([4], str. 51). V případě výrokové logiky se však odchyluje od ostatního výkladu a doplňuje podmínku uzavřenosti na substituci, tj. pracuje s výrokovými atomy jako s proměnnými za libovolné věty ([4], str. 40). Vychází mu pak korespondence s logikou $S5$.[29] V důkazu úplnosti postupuje metodou redukce na specificky definovanou normální formu. Ukáže, že každá formule ze $Sub(C)$ je redukovatelná kanonickým postupem na konstantu t („pravda“), která je do jazyka přidána, a že vše, co je takto redukovatelné, je dokazatelné v $S5$ ([4], str. 43-46).

To, že logika C není uzavřena na substituci, je důvodem, proč je dnes povětšinou odmítána jako „naivní“ verze modální logiky. Převládá názor, že logická pravdivost je věcí formy či syntaktické struktury nezávislé na interpretaci mimologických symbolů a z toho že vyplývá uzavřenost na substituci jako základní podmínka. Jinými slovy, má-li být nějaká množina formulí považována za logiku, musí být přinejmenším uzavřena na substituci. Podle takového kritéria logika C není vůbec logikou. U tohoto bodu se nyní krátce zastavíme, protože „logiky“, kterými se budeme zabývat ve druhé části, také postrádají tuto „základní logickou vlastnost“.

[28] Z tohoto pozorování plyne rozhodnutelnost logiky $S5$, protože pro každou formuli stačí ověřit, zda platí v konečně mnoha konečných modelech.

[29] Na základě Carnapova postupu ve zmiňovaném článku se nejeví ztotožňování jeho výrokové modální logiky s logikou $S5$ jako tolik problematické.

Na tuto problematiku se podíváme pohledem Gerharda Schurze, kerý se ve své práci [32] staví do opozice k obecně rozšířenému názoru. Tvrdí, že pokud chceme identifikovat nutnost jakožto logickou nutnost, pak logika C je nejen skutečnou logikou, ale navíc je jedinou úplnou modální logikou ([32], str. 1). Uzavřenost na univerzální substituci prezentuje jako jakýsi logický předsudek. Jedná se o podmínku zbytečně příliš silnou. Tato podmínka lze nahradit podmínkou slabší, kterou již logika C bude splňovat. Schurz nezpochybňuje, že logika se má týkat pouze formy a že má být nezávislá na interpretaci mimologických symbolů. Domnívá se však, že z toho nevyplývá uzavřenost na univerzální substituci. Rozlišuje mezi syntakticky izomorfními a homomorfními substitucemi. Izomorfní sustituce je taková, která přiřazuje atomickým formulím opět pouze atomické formule – a to navíc tak, že žádným dvěma atomům není přiřazen stejný atom. Je-li sub takováto substituce a φ je libovolná formule, pak formule φ a $sub(\varphi)$ jsou skutečně z hlediska syntaktické formy nerozlišitelné. Schurzův pojem homomorfní substituce splývá s pojmem univerzální substituce. Atomickým formulím mohou být přiřazeny i neatomické formule. Po provedení substituce dojde v takovém případě k nárůstu syntaktické komplexity dané formule. Formule, na níž byla substituce aplikována, je tedy odlišná čistě z hlediska syntaktické formy. ([32], str. 7, 8)

Schurz nevidí žádný apriorní důvod, proč by takové logické pojmy jako *logická pravda* měly splňovat podmínku uzavřenosti na homomorfní substituci, která mění syntaktickou strukturu formulí. Vždyť také v tradičních logikách existují logické pojmy, které tuto podmínku nesplňují. Příkladem může být *logická konzistence*. Např. množina formulí $\{p, q\}$ je v KVL konzistentní. Aplikujeme-li na formule substituci sub, pro niž platí $sub(p) = \neg q$ a $sub(q) = q$, získáme množinu $\{\neg q, q\}$ která konzistentní není. To vede Schurze k následující tezi ([32], str. 7):

> Pravá logika musí být uzavřena na syntakticky izomorfní substituce, ale nemusí být nutně uzavřena na syntakticky homomorfní substituce.

Schurz uvádí ještě jedno přísnější kritérium, které je založeno na sémantickém pohledu. Neformálně lze říci, že substituce je sémanticky izomorfní právě tehdy, když zachovává sémantickou volnost interpretací, tj. když „logický prostor všech interpretací substituovaných formulí zachovává celý prostor všech interpretací“ ([32], str. 7). Pro C bychom tuto podmínku mohli formulovat přesněji takto: Nechť Int je množina interpretací této logiky, $I \in Int$ a sub je substituce. Definujeme I_{sub} jako interpretaci splňující pro každý atom p, že $I_{sub}(p) = I(sub(p))$. Substituce sub je *sémanticky izomorfní*, když

$Int = \{I_{sub}; I \in Int\}$. Zřejmě každá syntakticky izomorfní substituce je též sémanticky izomorfní. Avšak existují sémanticky izomorfní sbustituce, které syntakticky izomorfní nejsou (např. substituce přiřazující každému atomu jeho negaci). Schurz tedy předkládá ještě druhou, v jistém smyslu silnější tezi: ([32], str. 9)

Pravá logika musí být uzavřena na sémanticky izomorfní substituce.

Lze lehce ukázat, že logika C je skutečně na sémanticky izomorfní substituce uzavřena. Navíc, má-li tato logika modelovat logickou nutnost a možnost, zdá se, že se jedná o jedinou úplnou modální logiku, protože skutečně pro každou splnitelnou formuli φ v C platí $\Diamond\varphi$. ([32], str. 9)

Důsledkem této úplnosti však je další zvláštnost logiky C. Modality v ní jsou totiž zcela eliminovatelné. Každá formule začínající modalitou je v C L-ekvivalentní (a tedy L-zaměnitelná) buď s libovolnou tautologií, nebo s libovolnou kontradikcí. To je však v souladu s názory, které prezentoval Carnap v *Logische Syntax der Sprache*.

Na závěr se ještě krátce zmíníme o predikátové verzi logiky C. Jak již bylo uvedeno, na svoji predikátovou modální logiku neklade Carnap v článku *Modalities and Quantification* podmínku uzavřenosti na substituci. Definuje sémantiku pro jazyk obsahující spočetnou množinu jmenných konstant. Předpokládá jedno spočetné univerzum, neboť každý prvek univerza má v tomto jazyce fixně přidělené jméno a žádné dvě jména neoznačují stejný objekt. Sémantika kvantifikátorů může být tedy stanovena pomocí substitucí konstant za proměnné. My však sémantiku logiky C zformulujeme moderním způsobem (jak je to např. provedeno v [13], odkud definici přebíráme), tj. s využitím pojmů modelu (který nahrazuje pojem popis stavu) a valuace. Nebudeme předpokládat ani spočetnost univerza.[30]

Nechť tedy Γ je prvořádový jazyk a $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ je spočetná množina prvořádových proměnných. Nechť M je prvořádový model pro jazyk Γ. Libovolná funkce e z V do nosné množiny modelu M se nazývá valuace v M. Formule lze vystavět z atomických formulí pomocí kvantifikátorů, výrokových operátorů $\wedge, \neg$ a operátoru nutnosti. Definujeme induktivně splněnost formule φ v modelu M při valuaci e ($M \Vdash \varphi[e]$). Případ atomických formulí je stejný jako v klasické predikátové logice. Kroky pro operátory $\wedge, \neg$ a kvantifikátory jsou též stejné. Zbývá dodefinovat krok pro operátor nutnosti:

[30]Pochopitelně se tím lehce změní množina platných formulí.

$M \Vdash \Box\psi[e]$ iff pro každý Γ-model N, který má společnou nosnou množinu s modelem M, platí, že $N \Vdash \psi[e]$.

Formule φ v jazyce Γ je logicky platná v C, když pro každý Γ-model a každou valuaci e v M platí, že $M \Vdash \varphi[e]$.

Predikátové verze logik C a $S5$ jsou v podobném sémantickém vztahu jako jejich výrokové verze. Axiomatický systém predikátové modální logiky $S5$ vypadá tak, že se k axiomatizaci klasické predikátové logiky přidají schémata $(K), (T), (5)$ a pravidlo necesitace. Přitom všechna schémata se vztahují na formule jazyka predikátové logiky obohaceného o operátor nutnosti. V již zmíněném článku [18] vytváří Kripke sémantiku této logiky. Lze ji formulovat tak, že Γ-modely této logiky jsou libovolné dvojice $\langle M, S\rangle$, kde S je množina Γ-modelů klasické predikátové logiky na stejném univerzu a $M \in S$. Nutnost formule ψ v $\langle M, S\rangle$ při dané valuaci e je definována takto:

$\langle M, S\rangle \models \Box\psi[e]$ iff pro každé $N \in S$ platí $\langle N, S\rangle \models \psi[e]$.

Modely logiky C lze tedy chápat jako takové modely $\langle M, S\rangle$ logiky $S5$, v nichž S je třída všech modelů na univerzu modelu M. Opět tak získáváme, že C je silnější než $S5$. Např. v C platí formule $\Diamond\forall x Px$, která neplatí v $S5$. Obecně jestliže φ má model libovolné mohutnosti, pak v C platí $\Diamond\varphi$. Ukážeme ještě jeden, zajímavější příklad, který je uveden v [13], str. 88. Zvažme formuli

$$\Box(\forall x\forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \to \forall x\exists y(f(y) = x)) \to$$

$$\to \Box((\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x\neg Rxx) \to \exists x\forall y\neg Rxy).$$

Tato formule je tvaru implikace. Čteme-li operátor nutnosti z perspektivy Carnapovy logiky, vyjadřuje přední člen, že každá injektivní funkce na univerzu je zároveň surjektivní. To znamená, že univerzum je konečné (podle Dedekindovy definice). Zadní člen této implikace říká, že každá tranzitivní a antireflexivní relace má maximální prvek, což je jiný způsob jak vyjádřit konečnost univerza. Tato formule je platná v C avšak nikoli v $S5$. Můžeme totiž vzít prvořádový model M, kde nosná množina je množina přirozených čísel, interpretace funkce f je identita a interpretace predikátu R je relace $<$. K M vezmeme $S5$-model $\langle M, \{M\}\rangle$. V tomto modelu platí přední člen naší formule, ale zadní nikoli.

Zajímavé a hodně diskutované schéma modální predikátové logiky, které je platné v $S5$ (a tedy i v C), je tzv. *Barcan formula* vyjadřující zaměnitelnost obecného kvantifikátoru za operátor nutnosti:

Barc $\forall x \Box \varphi \leftrightarrow \Box \forall x \varphi$.

Platností této formule se zabývá Carnap v [4] (str. 37) i v [6] (str. 178).

Nyní ukážeme, že v jistém smyslu je logika C až příliš silná. Předpokládejme, že máme dán jazyk Γ obsahující alespoň jeden predikát, jehož arita je větší než jedna. Následující zdůvodnění je uvedeno v [14], str. 122, 123.

Lemma 3.3.8 *Jestliže množina formulí v jazyce* Γ *platných v* C *je rekurzivně axiomatizovatelná, pak je rozhodnutelná.*

Důkaz: Předpokládejme, že množina formulí v jazyce Γ platných v C je rekurzivně axiomatizovatelná. Všechny důkazy v daném systému můžeme efektivně uspořádat v posloupnost $d_1, d_2, \ldots$. Nechť φ je formule v jazyce Γ. Platí, že právě jedna z formulí φ, $\neg\Box\varphi$ je platná a tedy dokazatelná. Tedy budeme-li procházet posloupnost důkazů, v konečně mnoha krocích najdeme důkaz jedné z těchto formulí. Pokud najdeme důkaz formule φ, je tato formule platná v logice C. Pokud najdeme důkaz formule $\neg\Box\varphi$, není formule φ platná v C. Máme tedy rozhodovací proceduru pro problém platnosti v C. Q.E.D.

Věta 3.3.6 *Množina formulí v jazyce* Γ *platných v* C *není rekurzivně axiomatizovatelná.*

Důkaz: Kdyby byla, byla by podle předchozího lemmatu rozhodnutelná a potom bychom mohli pro každou formuli predikátové logiky rozhodnout, zda platí v C či nikoli. Ale každá formule, která neobsahuje modality, je platná v C právě tehdy, když je platná v klasické predikátové logice. Získali bychom tedy rozhodnutelnost predikátové logiky (pro jazyk Γ), což by byl spor. Q.E.D.

3.4 Kripkovská sémantika

Saul Kripke rozvinul v sérii článků [19], [20] a [21] sémantický přístup, na základě kterého se mu podařilo stanovit sémantiku pro celou řadu modálních logik. Jedná se opět o „sémantiku možných světů“, avšak s podstatnou inovací. Do každého univerza možných světů je zavedena binární relace mezi těmito světy. To, že svět w je v této relaci se světem v, je neformálně interpretováno tak, že v situaci w je relativně možná situace v.

V článku [19] se Kripke zabývá takzvanými normálními modálními kalkuly, které obecně vymezuje tak, že jsou v nich dokazatelná schémata (K) a (T) a odvoditelná pravidla modus ponens a necesitace.[31] Jak již bylo uvedeno, právě těmito schématy a pravidly přidanými ke klasické výrokové logice je získán kalkul logiky T.[32] Přidáme-li k němu schéma (4), získáme logiku $S4$, přidáme-li k němu schéma (5), získáme logiku $S5$. Přidáme-li tzv. Brouwerův axiom, tj. schéma

(B) $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$,

získáme tzv. logiku B. Právě k těmto logikám byla nalezena v článku [19] vhodná „možnosvětová“ sémantika obohacená o uvedenou relaci. Její vymezení (moderně formulováno) vypadá takto: *Kripkovský model* je libovolná trojice $M = \langle W, R, V \rangle$, kde W je neprázdná množina, R je binární relace na této množině a V je funkce přiřazující atomickým formulím podmnožiny množiny W. Množině W se říká *univerzum možných světů*, její prvky jsou *možné světy*, relace R bývá označována jako *relace dosažitelnosti*. Nechť $w \in W$. Definujeme rekurzivně relaci $\Vdash$:

Pro každý atom p platí $M, w \Vdash p$ iff $w \in V(p)$.

$M, w \Vdash \varphi \wedge \psi$ iff $M, w \Vdash \varphi$ a $M, w \Vdash \psi$.

$M, w \Vdash \neg\varphi$ iff není pravda, že $M, w \Vdash \varphi$.

$M, w \Vdash \Box\varphi$ iff pro každé $v \in W$ takové, že wRv platí, že $M, v \Vdash \varphi$.

Řekneme, že formule φ platí v modelu M ($M \Vdash \varphi$), když pro každé $w \in W$ platí $M, w \Vdash \varphi$. Řekneme, že φ je logicky platná, když φ platí v každém kripkovském modelu. V [19] Kripke dokázal (pomocí rozvinuté metody bethovských sémantických tabulek), že sémantiku pro logiky $T, B, S4, S5$ získáme tak, že k právě stanovené definici přidáme dodatečné podmínky kladené na relaci R. Pokud uvedeme, že R musí být reflexivní (resp. reflexivní a symetrická, resp. reflexivní a tranzitivní, resp. relace ekvivalence) obdržíme sémantiku logiky T (resp. B, resp. $S4$, resp. $S5$). Kripke zřejmě považoval reflexivitu za základní podmínku, neboť intuitivně by měl být každý svět

[31] V současné době se definuje normální modální logika jako množina formulí, která obsahuje všechny tautologie, schéma K a je uzavřena na necesitaci, modus ponens a univerzální substituci. Logika C ani logiky představené v druhé části tedy pod tuto definici nespadají.

[32] Kripke tuto logiku označuje písmenem „M“. Volíme však současné označení.

sám pro sebe relativně možný (čemuž odpovídá, že co je nutně pravdivé, to je také pravdivé čili schéma (T)). Dnes se obecně reflexivita nepožaduje. Pokud bychom vzali sémantiku prostě tak, jak je uvedena (tj. bez jakýchkoli dodatečných podmínek kladených na relaci dosažitelnosti), získali bychom sémantiku adekvátní ke kalkulu, který dostaneme odstraněním schématu (T) z kalkulu logiky T. Výsledná logika je podle Kripkeho označována písmenem „K“.

V článku [20] se Kripke zabývá sémantikou predikátové modální logiky. Navrhuje zde přístup, ve kterém není univerzum možných světů vztaženo na jedno univerzum individuí (tak jak tomu je ve výše uvedené sémantice predikátové $S5$, kterou navrhl Kripke dříve v [18]), ale místo toho se každému světu v daném kripkovském rámci přiřadí jeho vlastní univerzum (množina individuí „existujících v daném světě“). Sémantika je definována pro jazyky obsahující pouze predikátové symboly. Nechť je tedy Γ takovýto jazyk. *Kripkovským Γ-modelem pro predikátovou logiku* bude čtveřice $M = \langle W, R, f, g\rangle$, kde W a R jsou jako v předchozí definici, f je funkce přiřazující každému světu z W množinu individuí a g je realizace predikátů z Γ v jednotlivých světech. Nechť $U = \bigcup_{w\in W} f(w)$ a P je n-ární predikátový symbol, pak $g(P, w) \subseteq U^n$. Tedy predikáty se ve světech realizují i vzhledem k „neexistujícím“ individuím. Valuace e je funkce z množiny proměnných do U. Nechť $w \in W$. Relaci splnitelnosti $\Vdash$ vzhledem k valuaci e můžeme definovat takto: Pro atomické formule je definice s pomocí g stejná jako v klasické predikátové logice (pouze je zde navíc relativita vůči jednotlivým světům). Rekurzivní kroky pro $\wedge, \neg$ a $\Box$ jsou analogické k výše uvedené výrokové verzi. Zbývá uvést krok pro obecný kvantifikátor. Zde je podstatné, že se kvantifikuje pouze přes existující individua:

$$M, w \Vdash \forall x\varphi[e] \text{ iff pro každé } a \in f(w) \text{ platí } M, w \Vdash \varphi[e^x_a].$$ [33]

Platnost v modelu je definována jako splnitelnost při každé valuaci a logická platnost jako platnost ve všech modelech. V takto definované sémantice najdeme již protipříklady na schéma *Barc* (dokonce na obě implikace obsažené v této ekvivalenci), i když požadujeme, aby R byla relace ekvivalence na W. V jednom směru to lze ilustrovat např. tak, že zavedeme jednomístný predikát existence, který je ve světě w jednoduše realizován množinou $f(w)$. Pak nutně platí, že každé individuum existuje, ale to neimplikuje, že všechno má

[33] e^x_a definujeme běžným způsobem: $e^x_a(x) = a$ a $e^x_a(y) = e(y)$ pro každou proměnnou y odlišnou od x.

vlastnost nutné existence (viz [20], str. 87, 88). Tato sémantika s odpovídající podmínkou kladenou na relaci dosažitelnosti odpovídá upravené predikátové verzi logiky T (resp. B, resp. $S4$, resp. $S5$). Axiomy budou pouze uzavřené formule. *Uzávěrem* otevřené formule φ bude uzavřená formule, kterou získáme z φ tak, že před ni připojíme univerzální kvantifikátory a operátory nutnosti v libovolném pořadí. Např. klademe-li pouze podmínku reflexivity, můžeme axiomatizovat takto ([20], str. 89). Axiomy budou libovolné uzávěry následujících formulí:

1. Formule tvaru výrokových tautologií,
2. $\varphi \to \forall x\varphi$, kde x není volná ve φ,
3. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$,
4. $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y))$,
5. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
6. $\Box\varphi \to \varphi$.

Jako odvozovací pravidlo postačí modus ponens. Necesitaci získáme jako odvozené pravidlo. Stejně jako u výrokové verze, uvedení dodatečné podmínky symetrie (resp. tranzitivity, resp. symetrie a tranzitivity) na sémantické straně odpovídá přidání uzávěrů schématu (B) (resp. (4), resp. (5)) do axiomatického systému.

V článku [21] uspěl Kripke v ustavení sémantiky celé řady „nenormálních“ modálních výrokových logik (tedy takových, které nejsou uzavřeny na pravidlo necesitace). Mezi těmito logikami byly také Lewisovy kalkuly $S2$ a $S3$. Základní idea spočívala v tom, že univerzum možných světů mohlo obsahovat tzv. „nenormální“ možné světy, ve kterých byly automaticky nepravdivé všechny formule tvaru $\Box\varphi$. Tím bylo umožněno, aby φ platila ve všech světech daného modelu, avšak $\Box\varphi$ nikoli.

Kripkovská sémantika je dnes základním sémantickým přístupem v modální logice.

Část II
E-logiky

Tato část je mým vlastním pokusem o formulaci sémantiky pro jistý typ modalit možnosti a nutnosti. Půjde o čtyři logiky, které budou založeny na interpretaci, při které mají možnost i nutnost epistemický charakter – jsou vždy relativní vůči nějaké znalosti. Epistemický ráz modality je důvodem toho, proč v pracovním označení logik vystupuje písmeno „E“. Půjde především o logiku $E3$. Logiky $E1$ a $E2$ jsou její jednodušší verze a mohou být chápány pouze jako přípravné kroky k formulaci logiky $E3$. Logiku $E4$ pak získáme další drobnou obměnou logiky $E3$.

4 Základní vlastnosti E-logik

4.1 Pomocná tvrzení

Nejprve rekapitulace značení a zavedení některých nových termínů. $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$ je spočetná množina atomických formulí. $Fle(KVL)$ je množina všech formulí jazyka klasické výrokové logiky. Základní spojky jsou $\neg, \wedge$, ostatní jsou definované běžným způsobem. Podobně $Fle(MVL)$ je množina všech formulí jazyka modální výrokové logiky – základní spojky jsou $\Box, \neg, \wedge$. Řekneme, že $T \subseteq Fle(KVL)$ je teorie KVL, když obsahuje vše, co je z ní v klasické výrokové logice odvoditelné a když je vzhledem k ní konzistentní, tj. když navíc $T \neq Fle(KVL)$. Řekneme, že $T \subseteq Fle(KVL)$ je mk-teorie KVL, když je to taková teorie KVL, která pro každou formuli $\varphi \in Fle(KVL)$ obsahuje buď φ, nebo $\neg\varphi$. $MKTH$ je množina všech mk-teorií KVL.

V této kapitole uvedeme bez důkazu několik známých tvrzení, která využijeme v dalším textu. Jedním z nich je tzv. Lindembaumovo lemma pro výrokovou logiku. Důkaz je vyložen např. v [29], str. 100-103. Uvedeme dvě verze tohoto tvrzení.

Věta 4.1.1 *Nechť $\varphi \in Fle(KVL)$ a $T \subseteq Fle(KVL)$. Pak platí:*

1. *φ je odvoditelná v klasické výrokové logice z T iff φ je obsažena v každé mk-teorii KVL, která obsahuje T.*

2. *Z T nelze v klasické logice odvodit spor iff T je obsažena v nějaké mk-teorii KVL.*

Dále uvedeme dva výsledky týkající se vztahů axiomatických systémů modálních logik a jejich kripkovské sémantiky. Jednak je to silná (globální) úplnost logiky K. V této podobě je uvedena např. v [29], str. 112. Druhý vyjadřuje vlastnost konečných modelů pro logiku $S4$ (viz [3] str. 340,341).

Věta 4.1.2 *Nechť $T \subseteq Fle(MVL)$ a $\varphi \in Fle(MVL)$. Pak platí:*

1. *Jestliže φ není z T odvoditelná v K, pak existuje kripkovský model M takový, že pro každé $\psi \in T$ platí $M \Vdash \psi$, ale přitom $M \nVdash \varphi$.*

2. *Jestliže φ není dokazatelná v $S4$, pak existuje konečný reflexivní a tranzitivní kripkovský model M takový, že $M \nVdash \varphi$.*

Následující dvě tvrzení jsou uvedena např. v [3], str. 58 a 62. Nechť G je množina atomů, $M_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$, $M_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ jsou kripkovské modely a $f : W_1 \rightarrow W_2$. Řekneme, že f je *izomorfismus* modelů M_1, M_2 vzhledem k atomům z G, když f je bijekce a jsou splněny následující podmínky:

1. Pro každý atom $p \in G$ a pro každý svět $w \in W_1$ platí $w \in V_1(p)$ iff $f(w) \in V_2(p)$.

2. Pro libovolné $v, w \in W_1$ platí vR_1w iff $f(v)R_2f(w)$.

Věta 4.1.3 *Nechť f je izomorfismus modelů M_1, M_2 vzhledem k atomům z G. Pak pro každou formuli $\varphi \in Fle(MVL)$, v níž se vyskytují pouze atomy z G, platí, že $M_1 \Vdash \varphi$ iff $M_2 \Vdash \varphi$.*

Pro kripkovské modely je však specifický následující obecnější typ funkce. Nechť opět $f : W_1 \rightarrow W_2$. Řekneme, že f je *p-morfismus* modelů M_1, M_2 vzhledem k atomům z G, když jsou splněny tyto podmínky:

1. Pro každý atom $p \in G$ a pro každý svět $w \in W_1$ platí $w \in V_1(p)$ iff $f(w) \in V_2(p)$.

2. Pro libovolné $v, w \in W_1$ platí, že pokud vR_1w, pak $f(v)R_2f(w)$.

3. Pro libovolné $v \in W_1$ a $w \in W_2$ platí, že pokud $f(v)R_2w$, pak existuje $u \in W_1$ tak, že vR_1u a $f(u) = w$.

Věta 4.1.4 *Nechť f je p-morfismus modelů M_1, M_2 vzhledem k atomům z G. Pak pro každou formuli $\varphi \in Fle(MVL)$, v níž se vyskytují pouze atomy z G, a pro každé $w \in W_1$ platí, že $M_1, w \Vdash \varphi$ iff $M_2, f(w) \Vdash \varphi$.*

4.2 Logika $E1$

Zvažme nyní tuto interpretaci modality nutnosti. V jisté situaci, ve které disponuji určitou sadou znalostí, je pro mě nutně pravdivé to, co by zůstalo pravdivé, ať už by se mé částečné poznání situace rozšířilo jakkoli na úplnou znalost situace. Jinými slovy, vím-li jen částečně něco o situaci, ve které se nacházím, otevírá se mi jistý prostor možností toho, jaký je celkový ráz situace. Je-li nějaké tvrzení pravdivé v každé takové možosti, je pravdivé nutně (vzhledem k tomu, co o situaci vím). Jazyk klasické výrokové logiky budeme interpretovat jako popisný pro danou situaci. Situace bude reprezentována svým úplným popisem, tj. budeme ji chápat jako mk-teorii KVL. Znalost o situaci bude nějaká množina popisných vět, které jsou za dané situace pravdivé, tedy nějaká podmnožina dané mk-teorie KVL. Na tomto základě nám vzniká modální situace, kterou bude představovat uspořádaná dvojice, jejíž prvním členem bude situace a druhým členem bude znalost o ní. Z každé modální situace w budou dosažitelné takové modální situace, v nichž je původní znalost (ve w) rozšířena na nějakou úplnou znalost. Tím dostáváme sémantiku logiky $E1$, kterou definujeme přesně pomocí jediného kripkovského modelu:

$M^{E1} = \left\langle W^E, R^{E1}, V^E \right\rangle$ je kripkovský model, kde platí:

$W^E = \{w; w = \langle T_w, Z_w \rangle, T_w \in MKTH, Z_w \subseteq T_w\}$,

$vR^{E1}w$ iff $Z_v \subseteq Z_w$ a $Z_w = T_w$,

$V^E(p) = \left\{w \in W^E; p \in T_w\right\}$ pro každý atom p.

Definice logicky platné formule v logice $E1$:

$\models_{E1} \varphi$ iff $M^{E1} \Vdash \varphi$.

Prvním pozorováním může být, že z každého světa je dosažitelný alespoň jeden svět, totiž ten, který má stejnou první složku a druhá se jí rovná (částečné poznání situace můžeme vždy zúplnit na celkové pravdivé poznání situace). Druhé pozorování je, že pro každou $\varphi \in Fle(KVL)$ a pro každé $w \in W^E$ platí, že $M^{E1}, w \Vdash \varphi$ iff $\varphi \in T_w$. O charakteru modelu vypovídá především Lindembaumovo lemma. Z jeho 2. verze je hned zřejmé, že vůbec nějaké mk-teorie KVL existují a že je tedy množina W^E neprázdná.[34] Přepisem 1. bodu Lindembaumova lemmatu je následující tvrzení, které zanedlouho využijeme.

Lemma 4.2.1 *Nechť $w \in W^E$. Pak pro libovolnou $\varphi \in Fle(KVL)$ platí $M^{E1}, w \Vdash \Box\varphi$ iff $Z_w \vdash_{KVL} \varphi$.*

Pro každou $\varphi \in Fle(MVL)$ definujeme $\varphi^* \in Fle(KVL)$ tak, že to bude formule, kterou získáme z φ tím, že z ní vyškrtáme všechny modality. Tedy definujeme:

[34] To je však ihned patrné také z toho, že mk-teorie KVL korespondují s jednotlivými ohodnoceními výrokových atomů.

$p^* = p$ pro libovolný atom p.

$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$.

$(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$.

$(\Box\varphi)^* = \varphi^*$.

Pro logiku $E1$ platí následující tvrzení.

Lemma 4.2.2 *Nechť $v \in W^E$. Pak pro libovolnou $\varphi \in Fle(MVL)$ a pro každé w takové, že $vR^{E1}w$ platí, že $M^{E1}, w \Vdash \varphi$ iff $M^{E1}, w \Vdash \varphi^*$.*

Důkaz: Pokud $vR^{E1}w$, pak $Z_w = T_w$. Pak jediný svět dosažitelný z w je on sám, což znamená, že $M^{E1}, w \Vdash \Box\varphi$ iff $M^{E1}, w \Vdash \varphi$. Q.E.D.

S využitím předchozího lemmatu se dá lehce ověřit platnost následujících schémat:

1. $\Box\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$,

2. $\Diamond\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$,

3. $\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$,

4. $\Diamond\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$,

5. $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi^*$,

6. $\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi^*$,

7. $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$,

8. $\Box\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$.

8. bod je tzv. McKinseyho formule. Z bodů 1. až 4. vidíme, že každý řetězec modalit se dá redukovat na svůj první člen. Je tomu tedy opačně než u logiky $S5$, kde se řetězce redukují na poslední člen. Jak je však zřejmé z 5. a 6. bodu, redukce modalizovaných formulí je mnohem silnější a zasahuje i vnitřek formule.

Přejdeme nyní k axiomatizaci logiky $E1$. Vezmeme takový axiomatický systém, který je rozšířením logiky K o schéma:

$(E1)$ $\Box\varphi \leftrightarrow (\varphi^* \wedge \Box\varphi^*)$.

Je-li formule φ dokazatelná v tomto kalkulu, píšeme $\vdash_{E1} \varphi$. Ukážeme např., že $\vdash_{E1} \Box\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$:

1.	$\vdash_{E1} \Box\Box\varphi \leftrightarrow ((\Box\varphi)^* \wedge \Box(\Box\varphi)^*)$	$(E1)$
2.	$\vdash_{E1} ((\Box\varphi)^* \wedge \Box(\Box\varphi)^*) \leftrightarrow (\varphi^* \wedge \Box\varphi^*)$	definice $*$
3.	$\vdash_{E1} (\varphi^* \wedge \Box\varphi^*) \leftrightarrow \Box\varphi$	$(E1)$

V následujícím se nám bude hodit, že $\vdash_{E1} \Box\varphi^* \rightarrow \varphi^*$:

1.	$\vdash_{E1} \Box\varphi^* \leftrightarrow ((\varphi^*)^* \wedge \Box(\varphi^*)^*)$	$(E1)$
2.	$\vdash_{E1} ((\varphi^*)^* \wedge \Box(\varphi^*)^*) \rightarrow (\varphi^*)^*$	KVL
3.	$\vdash_{E1} (\varphi^*)^* \leftrightarrow \varphi^*$	definice $*$

Právě vymezený kalkul je adekvátní vůči logice $E1$.

Věta 4.2.1 *Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$. Pak $\vdash_{E1} \varphi$ iff $\models_{E1} \varphi$.*

Důkaz: 1. (korektnost) Předpokládáme, že $\vdash_{E1} \varphi$. Aby platilo $\models_{E1} \varphi$, potřebujeme ověřit, že schéma $(E1)$ je platné v $E1$. Z druhého lemmatu této kapitoly víme, že $\models_{E1} \Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi^*$. Stačí ověřit, že také $\models_{E1} \Box\varphi^* \rightarrow \varphi^*$. Nechť $v \in W^E$. Pokud je φ^* obsažena v každé mk-teorii KVL, která rozšiřuje Z_v, pak je obsažena také v T_v, tedy $M^{E1}, v \Vdash \varphi^*$.

2. (úplnost) Nyní předpokládejme, že neplatí $\vdash_{E1} \varphi$. Dle věty o silné globální úplnosti logiky K to znamená, že existuje kripkovský model $M = \langle W, R, V\rangle$, kde platí všechny axiomy logiky $E1$ a pro nějaké $s \in W$ platí $M, s \nVdash \varphi$. Ke světu s definujeme svět $f(s) = \left\langle T_{f(s)}, Z_{f(s)}\right\rangle$ modelu M^{E1}:

$$T_{f(s)} = \{\psi \in Fle(KVL); M, s \Vdash \psi\}.$$

$$Z_{f(s)} = \{\psi \in Fle(KVL); M, s \Vdash \Box\psi\}.$$

Platí, že $T_{f(s)}$ je mk-teorie KVL a $Z_{f(s)}$ je teorie KVL. Protože v M platí axiom $(E1)$, pro každou $\psi \in Fle(KVL)$ platí $M, s \Vdash \Box\psi \rightarrow \psi$. Tedy $Z_{f(s)} \subseteq T_{f(s)}$ a $f(s)$ je skutečně světem modelu M^{E1}. Indukcí podle složitosti formule φ dokážeme, že $M, s \Vdash \varphi$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash \varphi$.

a) Pro libovolný atom p platí $M, s \Vdash p$ iff $p \in T_{f(s)}$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash p$.

b) Nechť je tvrzení dokázáno pro formuli ψ. Pak také platí $M, s \Vdash \neg\psi$ iff $M, s \nVdash \psi$ iff $M^{E1}, f(s) \nVdash \psi$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash \neg\psi$.

c) Předpokládejme nyní, že je tvrzení dokázáno pro formule ψ a χ. Pak také platí $M, s \Vdash \psi \wedge \chi$ iff $M, s \Vdash \psi$ a $M, s \Vdash \chi$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash \psi$ a $M^{E1}, f(s) \Vdash \chi$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash \psi \wedge \chi$.

d) Zbývá dokázat krok pro $\Box$. Platí $M, s \Vdash \Box\psi$ iff $M, s \Vdash \Box\psi^*$ iff $\psi^* \in Z_{f(s)}$ iff $Z_{f(s)} \vdash_{KVL} \psi^*$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash \Box\psi^*$ iff $M^{E1}, f(s) \Vdash \Box\psi$.

V bodě d) je první a poslední ekvivalence zajištěna dokazatelností (resp. platností) formule $\Box\psi \leftrightarrow \Box\psi^*$, druhá ekvivalence definicí $Z_{f(s)}$, třetí tím, že $Z_{f(s)}$ je teorie KVL a Lindembaumovo lemma zajišťuje čtvrtou ekvivalenci.

Protože v $f(s)$ platí stejné formule jako v s, máme $M^{E1}, f(s) \nVdash \varphi$. Tedy neplatí $\models_{E1} \varphi$. Q.E.D.

Logika $E1$ není uzavřená na substituci libovolných formulí. Platí zde např. formule $\Box p \rightarrow p$. Z druhého lemmatu je zřejmé, že $\Box(\Box p \vee \Box\neg p)$ je také platnou formulí, tj. platí ve všech světech modelu M^{E1}. Ale vezmeme-li např. takový svět w, pro který je Z_w prázdná množina, pak podle 2. verze Lindembaumova lemmatu existují dva světy dosažitelné z w, z nichž v jednom platí p a ve druhém $\neg p$. Tedy ve w neplatí $\Box p \vee \Box\neg p$. Tedy $\Box(\Box p \vee \Box\neg p) \rightarrow (\Box p \vee \Box\neg p)$ není platnou formulí. Z předchozí věty je však patrné, že jistá omezená stubstituce je možná.

Věta 4.2.2 *Logika $E1$ je uzavřená na substituci formulí jazyka klasické výrokové logiky.*

Důkaz: Je-li formule φ platná v logice $E1$, existuje k ní důkaz v uvedeném kalkulu. Můžeme substituovat v každém kroku důkazu za libovolný atom p libovolnou formuli ψ jazyka klasické výrokové logiky a výsledná posloupnost formulí bude opět důkazem, protože užití axiomu $(E1)$ nechá ψ beze změny. Posledním členem získaného důkazu bude formule $\varphi(p/\psi)$, která je tedy platnou formulí logiky $E1$. Q.E.D.

Protože v $E1$ není platné schéma (T), není tato logika silnější než T. Není však ani slabší.

Nechť G je množina atomických formulí. Pak $Int(G)$ je množina všech ohodnocení atomů z G. $At(\varphi)$ je množina atomů vyskytujících se ve φ. Ke každému $w \in W^E$ a každé $\varphi \in Fle(MVL)$ definujeme $J^w_\varphi \in Int(At(\varphi))$. Pro každý atom $p \in At(\varphi)$ platí $J^w_\varphi(p) = 1$ iff $p \in T_w$.

K libovolné formuli $\varphi \in Fle(MVL)$ definujeme model

$M^{E1}_\varphi = \left\langle W^E_\varphi, R^{E1}_\varphi, V^E_\varphi \right\rangle$, kde

$$W_\varphi^E = \{s; s = \langle I_s, K_s \rangle, K_s \subseteq Int(At(\varphi)), I_s \in K_s\},$$

$$sR_\varphi^{E1}t \text{ iff } I_t \in K_s \text{ a } K_t = \{I_t\},$$

$$V_\varphi^E(p) = \left\{s \in W_\varphi^E; I_s(p) = 1\right\} \text{ pro každý atom } p \in At(\varphi).$$

V tomto modelu jsou ohodnoceny pouze atomy vyskytující se ve φ. Pro dané φ můžeme ke každému $w \in W^E$ přiřadit svět $f(w) \in W_\varphi^E$ tak, že platí

$$I_{f(w)} = J_\varphi^w$$

$$K_{f(w)} = \left\{J_\varphi^v; wR^{E1}v\right\}$$

Nyní lze indukcí ověřit, že pro libovolné $w \in W^E$ a každou $\psi \in Fle(MVL)$, v níž se vyskytují pouze atomy z $At(\varphi)$ platí

$$M^{E1}, w \Vdash \psi \text{ iff } M_\varphi^{E1}, f(w) \Vdash \psi.$$

Protože f je na množinu W_φ^E, plyne z toho, že

$$M^{E1} \Vdash \varphi \text{ iff } M_\varphi^{E1} \Vdash \varphi.$$

M_φ^{E1} je konečný, explicitně zkonstruovaný model. Důsledkem je tedy následující tvrzení.

Věta 4.2.3 *Logika $E1$ je rozhodnutelná.*

4.3 Logika $E2$

Pokud bychom se nechtěli vzdát schématu (T), mohli bychom tomu přizpůsobit interpretaci modality nutnosti: Tvrzení je nyní nutně pravdivé, když je pravdivé, a zůstalo by pravdivé při jakémkoli rozšíření našeho poznání na úplné poznání situace. Výsledná logika se nám tím mírně modifikuje. Za její základ můžeme vzít reflexivní uzávěr modelu pro logiku $E1$:

$$M^{E2} = \left\langle W^E, R^{E2}, V^E \right\rangle \text{ je kripkovský model, kde platí:}$$

$$vR^{E2}w \text{ iff } vR^{E1}w \text{ nebo } v = w.$$

Definice logicky platné formule v logice $E2$:

$$\models_{E2} \varphi \text{ iff } M^{E2} \Vdash \varphi.$$

První lemma předchozí kapitoly platí i pro logiku $E2$. Dále, v $E2$ již platí schéma (T), ale neplatí zde pravolevá implikace axiomu $(E1)$, tj. schéma $(\Box\varphi^* \wedge \varphi^*) \rightarrow \Box\varphi$. Mezi platná schémata stále patří:

1. $\Box\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$,
2. $\Diamond\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$,
3. $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$,
4. $\Box\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$.

Protože platí schémata (T) a (4), je logika $E2$ rozšířením logiky $S4$. Schéma (5) v ní však neplatí. Přesto není slabší než logika $S5$, o čemž svědčí např. platnost McKinseyho formule. Nyní definujeme:

$$UP = \{w \in W^E; T_w = Z_w\}.$$

$$UP_v = \{w \in UP; vR^{E2}w\}.$$

Pro každé $\varphi \in Fle(KVL)$ platí:

$$M^{E2}, v \Vdash \Box\Diamond\varphi \text{ iff pro každé } w \in UP_v \ M^{E2}, w \Vdash \varphi \text{ iff } M^{E2}, v \Vdash \Box\varphi^*.$$

Tedy neplatí již sice silná schémata $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi^*$ a $\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$, ale platí stále jejich obměny $\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\varphi^*$ a $\Box\Diamond\varphi^* \leftrightarrow \Box\varphi^*$.

Axiomatizaci logiky $E2$ získáme tak, že k logice K přidáme schéma:

$(E2)$ $\Box\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \Box\varphi^*)$.

Je-li φ dokazatelná v tomto kalkulu, píšeme, $\vdash_{E2} \varphi$. Např. ukážeme, že je dokazatelná formule $\Diamond\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \Diamond\varphi^*)$:

1.	$\vdash_{E2} \Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	definice $\Diamond$
2.	$\vdash_{E2} \neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \Box(\neg\varphi)^*)$	$(E1)$
3.	$\vdash_{E2} \neg(\neg\varphi \wedge \Box(\neg\varphi)^*) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \vee \neg\Box\neg\varphi^*)$	KVL, definice $*$
4.	$\vdash_{E2} (\neg\neg\varphi \vee \neg\Box\neg\varphi^*) \leftrightarrow (\varphi \vee \Diamond\varphi^*)$	KVL, definice $\Diamond$

Nyní můžeme ukázat, že je dokazatelná McKinseyho formule. Využijeme faktu, že díky dokazatelnosti (T) je dokazatelná formule $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \vdash_{E2} \Box\Diamond\varphi \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Box(\Diamond\varphi)^*) & (E2) \\
2. & \vdash_{E2} (\Diamond\varphi \wedge \Box(\Diamond\varphi)^*) \rightarrow \Box(\Box\varphi)^* & \text{definice } *,\ KVL \\
3. & \vdash_{E2} \Box(\Box\varphi)^* \rightarrow \Diamond(\Box\varphi)^* & \\
4. & \vdash_{E2} \Diamond(\Box\varphi)^* \rightarrow (\Box\varphi \vee \Diamond(\Box\varphi)^*) & KVL \\
5. & \vdash_{E2} (\Box\varphi \vee \Diamond(\Box\varphi)^*) \leftrightarrow \Diamond\Box\varphi &
\end{array}
$$

Kalkul je adekvátní vůči logice $E2$.

Věta 4.3.1 *Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$. Pak $\vdash_{E2} \varphi$ iff $\models_{E2} \varphi$.*

Důkaz: 1. (korektnost) Předpokládejme, že $\vdash_{E2} \varphi$. Aby platilo $\models_{E2} \varphi$ musíme ověřit platnost schématu ($E2$): $M^{E2}, v \Vdash \Box\varphi$ iff $M^{E2}, v \Vdash \varphi$ a pro každé $w \in UP_v$ $M^{E2}, w \Vdash \varphi$ iff $M^{E2}, v \Vdash \varphi$ a pro každé $w \in UP_v$ $M^{E2}, w \Vdash \varphi^*$ iff $M^{E2}, v \Vdash \varphi$ a $M^{E2}, v \Vdash \Box\varphi^*$.

2. (úplnost) Postup je stejný jako pro logiku $E1$. Mírně se liší jen indukční krok pro $\Box$. Vypadá takto: $M, s \Vdash \Box\psi$ iff $M, s \Vdash \psi$ a $M, s \Vdash \Box\psi^*$ iff $M^{E2}, f(s) \Vdash \psi$ a $M^{E2}, f(s) \Vdash \Box\psi^*$ iff $M^{E2}, f(s) \Vdash \Box\psi$. Druhá ekvivalence platí jednak proto, že díky indukčnímu předpokladu platí $M, s \Vdash \psi$ iff $M^{E2}, f(s) \Vdash \psi$ a dále proto, že $M, s \Vdash \Box\psi^*$ iff $\psi^* \in Z_{f(s)}$ iff $Z_{f(s)} \vdash_{KVL} \psi^*$ iff $M^{E2}, f(s) \Vdash \Box\psi^*$. Q.E.D.

Logika $E2$ také není uzavřena na univerzální substituci. Platí v ní např. formule $\Box\Diamond p \rightarrow \Box p$, ale neplatí v ní formule $\Box\Diamond(\Box p \vee \Box\neg p) \rightarrow \Box(\Box p \vee \Box\neg p)$. Následující tvrzení lze ověřit stejným způsobem jako analogické tvrzení pro logiku $E1$.

Věta 4.3.2 *Logika $E2$ je uzavřená na substituci formulí jazyka klasické výrokové logiky.*

Co se rozhodnutelnosti týče, můžeme vzít jako model M_φ^{E2} reflexivní uzávěr modelu M_φ^{E1} (tj. doplníme relaci dosažitelnosti tak, aby byl každý svět dosažitelný sám ze sebe) a obdržíme stejné tvrzení jako pro logiku $E1$:

$$M^{E2} \Vdash \varphi \text{ iff } M_\varphi^{E2} \Vdash \varphi.$$

Věta 4.3.3 *Logika $E2$ je rozhodnutelná.*

4.4 Logika $E3$

V logice $E1$ byla daná modální situace relativní pouze k takovým modálním situacím, v nichž bylo poznání zúplněno na úplné poznání situace. V logice $E2$ jsme navíc přidali relativitu každé modální situace vůči sobě samotné. Nyní půjde o to vztáhnout modální situaci ke všem těm, v nichž je *libovolně* rozšířeno současné poznání. Interpretace modality nutnosti v logice $E3$ je takováto: Nutně pravdivé je pro nás v dané modální situaci to, co zůstane pravdivé, ať už se jakkoli bude rozšiřovat naše znalost. Nezvažují se tedy pouze taková rozšíření, která jsou úplným poznáním situace, ale zvažují se i taková rozšíření, kde stále něco zůstává neznámé. Formální definice této sémantiky vypadá takto:

$M^{E3} = \left\langle W^E, R^{E3}, V^E \right\rangle$ je kripkovský model, kde platí:

$vR^{E3}w$ iff $Z_v \subseteq Z_w$.

Definice logicky platné formule v logice $E3$:

$\models_{E3} \varphi$ iff $M^{E3} \Vdash \varphi$.

Protože je R^{E3} reflexivní a tranzitivní, je výsledná logika jistě silnější než $S4$. Neplatí zde schéma (5), tedy není silnější než $S5$. Není ale ani slabší než $S5$, protože zde platí McKinseyho formule, která neplatí v $S5$ (ani v $S4$ – a $E3$ je tudíž ostře silnější než tato logika). V $E3$ neplatí ani jeden z axiomů ($E1$), ($E2$), ale platí zde např. formule $(p \wedge \Diamond\neg p) \rightarrow \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$, která neplatí ani v $E1$, ani v $E2$.

Podíváme se nyní podrobněji na některé alternativní formulace sémantiky pro logiku $E3$. Nejdříve další pojmy a značení, které budeme používat: Nechť $Z \subseteq Fle(KVL)$, pak

$[Z] = \{\varphi \in Fle(KVL); Z \vdash_{KVL} \varphi\}$.

(Takže pokud $Z \neq Fle(KVL)$, platí $[Z] = Z$ iff Z je teorie KVL.) Int je množina všech interpretací všech výrokových atomů. TH je množina všech teorií KVL. Když $Z \subseteq Fle(KVL)$, tak

$Mod(Z) = \{I \in Int; \forall\varphi \in Z : I \models \varphi\}$.

Když $K \subseteq Int$, tak

$Th(K) = \{\varphi \in Fle(KVL); \forall I \in K : I \models \varphi\}$.

Nyní definujeme pomocný model M_1, ve kterém jsou znalosti omezeny na teorie KVL:

$M_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ je kripkovský model, kde platí:

$W_1 = \{w; w = \langle T_w, Z_w\rangle, T_w \in MKTH, Z_w \in TH, Z_w \subseteq T_w\}$,

vR_1w iff $Z_v \subseteq Z_w$,

$V_1(p) = \{w \in W_1; p \in T_w\}$ pro každý atom p.

Ukazuje se, že uvedené omezení není podstatné.

Lemma 4.4.1 *Pro každé $\varphi \in Fle(MVL)$ platí $M^{E3} \Vdash \varphi$ iff $M_1 \Vdash \varphi$.*

Důkaz: Definujeme funkci $f : W^E \to W_1$. Nechť $w \in W^E$. Pak

$f(w) = \langle T_w, [Z_w]\rangle$.

$Z_w \subseteq T_w$, tedy také $[Z_w] \subseteq T_w$ a $[Z_w]$ je teorie KVL. Tedy $f(w) \in W_1$. Dokážeme, že f je surjektivní p-morfismus. f je surjektivní: Nechť $w \in W_1$, pak také $w \in W^E$ a platí $f(w) = \langle T_w, [Z_w]\rangle = \langle T_w, Z_w\rangle = w$. f je p-morfismus:

1. Nechť p je atom a $w \in W_1$. Pak platí: $M^{E3}, w \Vdash p$ iff $p \in T_w$ iff $p \in T_{f(w)}$ iff $M_1, f(w) \Vdash p$.

2. Nechť $v, w \in W^E$ a $vR^{E3}w$. Pak platí: $Z_v \subseteq Z_w$. Tedy $[Z_v] \subseteq [Z_w]$. Tedy $f(v)R_1f(w)$.

3. Nechť $v \in W^E$, $w \in W_1$ a platí $f(v)R_1w$. Pak také platí: $Z_{f(v)} \subseteq Z_w$, tj. $[Z_v] \subseteq Z_w$. Tedy i $Z_v \subseteq Z_w$. Přitom $w \in W^E$ a tedy platí $vR^{E3}w$ a $f(w) = w$. Q.E.D.

Tento model koresponduje s modelem M_2, který je založen na interpretacích:

$M_2 = \langle W_2, R_2, V_2\rangle$ je kripkovský model, kde platí:

$W_2 = \{s; s = \langle I_s, K_s\rangle, K_s \subseteq Int, K_s = Mod(Th(K_s)), I_s \in K_s\}$,

sR_2t iff $K_t \subseteq K_s$,

$V_2(p) = \{s \in W_2; I_s \models p\}$ pro každý atom p.

Lemma 4.4.2 *Pro každé $\varphi \in Fle(MVL)$ platí $M_1 \Vdash \varphi$ iff $M_2 \Vdash \varphi$.*

Důkaz: Definujeme fci $f : W_1 \to W_2$. Pro každý $w \in W_1$ definujeme $f(w) = \left\langle I_{f(w)}, K_{f(w)} \right\rangle$ takto:

$$\text{Pro každý atom } p \text{ je } I_{f(w)}(p) = 1 \text{ iff } p \in T_w,\ K_{f(w)} = Mod(Z_w).$$

Ověříme, že $f(w) \in W_2$. Platí, že $Mod(T_w) = \left\{I_{f(w)}\right\}$. Protože $Z_w \subseteq T_w$, platí $Mod(T_w) \subseteq Mod(Z_w)$. Tedy $\left\{I_{f(w)}\right\} \subseteq K_{f(w)}$ a tedy $I_{f(w)} \in K_{f(w)}$. Platí $Mod(Th(Mod(Z_w))) = Mod(Z_w)$, tj. $Mod(Th(K_{f(w)})) = K_{f(w)}$. Dokážeme, že f je izomorfismus modelů M_1 a M_2.

1. f je surjektivní: Nechť $s \in W_2$. Tedy $K_s = Mod(Th(K_s))$. $I_s \in K_s$, tedy $Th(K_s) \subseteq Th(\{I_s\})$. Přitom $Th(\{I_s\})$ je mk-teorie KVL a $Th(K_s)$ je teorie KVL. Tedy $\langle Th(\{I_s\}), Th(K_s)\rangle \in W_1$. Označme tento svět jako v. Přitom $I_{f(v)} = I_s$ a $K_{f(v)} = Mod(Th(K_s)) = K_s$. Tedy $f(v) = s$.

2. f je injektivní: Nechť $v, w \in W_1$ takové, že $v \neq w$. Pak $T_v \neq T_w$ nebo $Z_v \neq Z_w$. Když $T_v \neq T_w$, pak $I_{f(v)} \neq I_{f(w)}$ a tedy $f(v) \neq f(w)$.

Nechť $Z_v \neq Z_w$ a nechť např. ψ je taková formule jazyka KVL, že $\psi \in Z_v$ a $\psi \notin Z_w$ (obrácený případ by byl samozřejmě analogický). Protože Z_w je teorie KVL, neplatí, že $Z_w \vdash_{KVL} \psi$. Tedy existuje taková $J \in Mod(Z_w)$, že neplatí $J \models \psi$. Přitom pro každou $I \in Mod(Z_v)$ platí $I \models \psi$. Tedy $J \notin Mod(Z_v)$ a $J \in Mod(Z_w)$, tj. $J \notin K_{f(v)}$ a $J \in K_{f(w)}$. Tedy $f(v) \neq f(w)$.

3. Pro každý atom p a pro každý $w \in W_2$ platí: $M_1, w \models p$ iff $p \in T_w$ iff $I_{f(w)}(p) = 1$ iff $M_2, f(w) \models p$.

4. Pro každé $s, t \in W_1$ platí: vR_1w iff $Z_v \subseteq Z_w$ iff $Mod(Z_w) \subseteq Mod(Z_v)$ iff $K_{f(w)} \subseteq K_{f(v)}$ iff $f(v)R_2f(w)$. Druhá ekvivalence je dána tím, že Z_v, Z_w jsou teorie KVL. Q.E.D.

Mohla by vyvstat otázka, zda stejný izomorfismus neplatí i mezi původním modelem M^{E3} a obměnou modelu M_2, ve které bychom připouštěli v druhé složce světů libovolnou množinu interpretací (vynechali bychom tudíž podmínku $K_s = Mod(Th(K_s))$). Zde by jistě o izomorfismus nešlo, protože mohutnost takového modelu by byla rovna mohutnosti množiny interpretací krát počet podmnožin této množiny, tj. $2^{\aleph_0} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Přitom mohutnost modelu M^{E3} je rovna mohutnosti množiny $MKTH$ (u které existuje bijekce s množinou Int) krát počet podmnožin libovolné mk-teorie KVL (všechny mají stejnou mohutnost $\aleph_0$), tj. $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Nicméně z následujícího vyplyne, že v této obměně modelu M_2 by platily také přesně stejné formule jako v logice $E3$.

Budeme však pracovat s modelem M_2. Bude nám stačit, že podmínka $K_s = Mod(Th(K_s))$ je splněna pro každou konečnou množinu interpretací. K libovolné interpretaci I a množině atomů $G = \{p_1, \ldots, p_n\}$ definujeme formuli λ_I^G tak, že je to formule

$l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, kde pro $1 \leq k \leq n$ platí

$l_k = p_k$, je-li $I(p_k) = 1$ a $l_k = \neg p_k$, je-li $I(p_k) = 0$.

Lemma 4.4.3 *Nechť $K \subseteq Int$ a K je konečná. Pak $K = Mod(Th(K))$.*

Důkaz: Jistě platí $K \subseteq Mod(Th(K))$. Chceme $Mod(Th(K)) \subseteq K$. Když $K = \emptyset$, pak $Th(K) = Fle(KVL)$ a tedy $Mod(Th(K)) = \emptyset$. Předpokládáme dále, že $K \neq \emptyset$. Pro spor předpokládejme, že $J \in Mod(Th(K))$ a $J \notin K$. Protože $J \notin K$, můžeme pro každé $I \in K$ vzít $i \in N$ takové, že $I(p_i) \neq J(p_i)$. Nechť n je maximum těchto vybraných hodnot a nechť $T = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Nechť $K = \{I_1, \ldots, I_m\}$. Za formuli λ_K vezměme formuli $\lambda_{I_1}^T \vee \ldots \vee \lambda_{I_m}^T$. Pak $\lambda_K \in Th(K)$, ale $J(\lambda_K) = 0$. Tedy $J \notin Mod(Th(K))$ a dostáváme spor. Q.E.D.

Axiomatický systém pro logiku $E3$ získáme tak, že přidáme k logice $S4$ následující schéma:

$(E3)$ $\Phi^{\Diamond} \rightarrow \Diamond(\varphi_1 \wedge \Phi^{\Diamond} \wedge \Box\Phi^{\vee})$,

kde $\Phi^{\vee}$ je formule $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$, $\Phi^{\Diamond}$ je formule $\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n$ a formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (kde $n \geq 1$) jsou v jazyce klasické výrokové logiky. Je-li φ dokazatelná v tomto kalkulu, píšeme $\vdash_{E3} \varphi$.

Jako ilustraci aplikace schématu $(E3)$ ukážeme, že v uvedeném systému je dokazatelná formule $(\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi) \rightarrow \Diamond(\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi)$ pro libovolnou $\varphi \in Fle(KVL)$. Tato formule není dokazatelná v $S4$, avšak je dokazatelná v $S5$.

1.	$\vdash_{E3} (\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi) \rightarrow (\Diamond\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi)$	$S4$
2.	$\vdash_{E3} (\Diamond\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi) \rightarrow \Diamond(\neg\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi \wedge \Box(\neg\varphi \vee \varphi))$	$(E3)$
3.	$\vdash_{E3} \Diamond(\neg\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi \wedge \Box(\neg\varphi \vee \varphi)) \rightarrow \Diamond(\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi)$	$S4$

Budeme používat následující značení. Nechť $X = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$.

$X^{\Diamond}$ je formule $\Diamond\theta_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\theta_m$.

$X^{\neg}$ je formule $\neg\theta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\theta_m$.

$X^{\neg\Diamond}$ je formule $\neg\Diamond\theta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\theta_m$.

$X^{\vee}$ je formule $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_m$.

Věta 4.4.1 *Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$. Pak $\vdash_{E3} \varphi$ iff $\models_{E3} \varphi$.*

Důkaz: Dokážeme korektnost a úplnost vůči modelu M_2.

1. (korektnost) M_2 je reflexivní a tranzitivní kripkovský model. Je tedy třeba ověřit pouze platnost schématu $(E3)$. Nechť $\Phi^{\vee}, \Phi^{\Diamond}$ jsou formule z definice schématu $(E3)$. Nechť $t \in W_2$ a platí $M_2, t \Vdash \Phi^{\Diamond}$. Pak pro každou φ_i (kde $1 \leq i \leq n$) můžeme vzít $I_{\varphi_i} \in K_t$ takovou, že $I_{\varphi_i} \models \varphi_i$. Nechť $K = \{I_{\varphi_1}, \ldots, I_{\varphi_n}\}$. Vezměme dvojici $s = \langle I_{\varphi_1}, K \rangle$. Platí, že $I_{\varphi_1} \in K$ a protože je K konečná, podle předchozího tvrzení platí také $K = Mod(Th(K))$. Tedy $s \in W_2$. Protože $K \subseteq K_t$, platí tR_2s. Přitom $M_2, s \Vdash \varphi_1 \wedge \Phi^{\Diamond} \wedge \Box\Phi^{\vee}$. Tedy $M_2, t \Vdash \Diamond(\varphi_1 \wedge \Phi^{\Diamond} \wedge \Box\Phi^{\vee})$.

2. (úplnost) Předpokládejme, že je dána formule φ jazyka MVL, pro níž neplatí $\vdash_{E3} \varphi$. Pak také neplatí $L \vdash_K \varphi$, kde L je množina všech instancí schémat $(T), (4)$ a $(E3)$. Podle globální verze věty o silné úplnosti logiky K existuje model $M = \langle W, R, V \rangle$, kde platí všechny dokazatelné formule logiky $(E3)$ a existuje $s \in W$ takový, že $M, s \nVdash \varphi$. Nechť $At(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Nechť H je množina všech formulí, které mají tvar $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, kde pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, platí, že l_i je buď p_i nebo $\neg p_i$. Pro každou $\psi \in H$ definujeme ohodnocení I_ψ:

Pro $k \in \{1, \ldots, n\}$ je $I_\psi(p_k) = 1$ iff l_k v ψ je p_k.

Pro $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$ dodefinujeme např. $I_\psi(p) = 1$.

Dále zavedeme pro každý $w \in W$ množinu H_w:

$$H_w = \{\vartheta \in H; M, w \Vdash \Diamond\vartheta\}.$$

Nyní můžeme určit funkci $f : W \to W_2$.

$$I_{f(w)} = I_\psi, \text{ kde } \psi \in H \text{ a } M, w \Vdash \psi,$$

$$K_{f(w)} = \{I_\vartheta; \vartheta \in H_w\}.$$

Definice je jednoznačná, protože ve světě w platí právě jedna formule z H. Protože v M platí schéma $\vartheta \to \Diamond\vartheta$, platí $I_{f(w)} \in K_{f(w)}$. Protože $K_{f(w)}$ je konečná, platí $Mod(Th(K_{f(w)})) = K_{f(w)}$. Tedy skutečně $f(w) \in W_2$. Dokážeme, že f je p-morfismus pro atomy $p_1, \ldots, p_n$.

1. Nechť $w \in W$ a $\psi \in H$ taková, že $M, w \Vdash \psi$ a $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pak platí: $M, w \Vdash p_k$ iff l_k v ψ je p_k iff $I_\psi(p_k) = 1$ iff $I_{f(w)}(p_k) = 1$ iff $M_2, f(w) \Vdash p_k$.

2. Nechť $t, u \in W$ a platí tRu. Protože v M platí schéma $\Diamond\Diamond\vartheta \to \Diamond\vartheta$, platí: $H_u \subseteq H_t$, tedy $K_{f(u)} \subseteq K_{f(t)}$, tedy $f(t)R_2f(u)$.

3. Nechť $t \in W$ a $u \in W_2$ a platí $f(t)R_2u$. Definujeme

$$U = \{\vartheta \in H; I_\vartheta \in K_u\}.$$

Platí, že $K_u \subseteq K_{f(t)}$, tedy $U \subseteq H_t$. Předpokládejme navíc, že $I_u = I_\chi$ pro nějakou $\chi \in U$. Z definice $M, t \Vdash H_t^\Diamond$, tedy i $M, t \Vdash U^\Diamond$. Nyní dokážeme, že $\vdash_{E3} U^\Diamond \to \Diamond(\chi \wedge U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond})$.

1.	$\vdash_{E3} U^\vee \to (H - U)^\neg$	KVL
2.	$\vdash_{E3} \Box U^\vee \to \Box(H - U)^\neg$	$1., S4$
3.	$\vdash_{E3} \Box(H - U)^\neg \to (H - U)^{\neg\Diamond}$	$S4$
4.	$\vdash_{E3} \Box U^\vee \to (H - U)^{\neg\Diamond}$	$2., 3., S4$
5.	$\vdash_{E3} (\chi \wedge U^\Diamond \wedge \Box U^\vee) \to (\chi \wedge U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond})$	$4., KVL$
6.	$\vdash_{E3} \Diamond(\chi \wedge U^\Diamond \wedge \Box U^\vee) \to \Diamond(\chi \wedge U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond})$	$5., S4$
7.	$\vdash_{E3} U^\Diamond \to \Diamond(\chi \wedge U^\Diamond \wedge \Box U^\vee)$	$(E3), \chi \in U$
8.	$\vdash_{E3} U^\Diamond \to \Diamond(\chi \wedge U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond})$	$6., 7., KVL$

Protože $M, t \Vdash U^\Diamond$, platí také $M, t \Vdash \Diamond(\chi \wedge U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond})$. Tedy existuje $v \in W$ takový, že tRv a $M, v \Vdash \chi \wedge U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond}$. Protože $M, v \Vdash \chi$, platí, že $I_{f(v)} = I_\chi = I_u$. Protože $M, v \Vdash U^\Diamond \wedge (H - U)^{\neg\Diamond}$, platí, že $H_v = U$. Pak ale $K_{f(v)} = K_u$. Tedy $f(v) = u$. Tím je dokončen důkaz, že f je p-morfismus pro atomy $p_1, \ldots, p_n$. To znamená, že pro každý svět $w \in W$ a pro každou modální formuli ξ obsahující pouze atomy $p_1, \ldots, p_n$ platí, že $M, w \Vdash \xi$ iff $M_2, f(w) \Vdash \xi$. Protože $M, s \nVdash \varphi$, také $M_2, f(s) \nVdash \varphi$. Tedy formule φ není platná v modelu M_2. Q.E.D.

Logika $E3$ není uzavřena na substituci ze stejného důvodu, jaký jsme uvedli u logiky $E2$. Protože schéma $E3$ je formulováno pro libovolné formule jazyka klasické výrokové logiky, automaticky získáváme substituovatelnost formulí tohoto jazyka.

Věta 4.4.2 *Logika $E3$ je uzavřená na substituci formulí jazyka klasické výrokové logiky.*

Pro každou formuli φ opět můžeme sestrojit konečný model M^{E3}_φ:

$M^{E3}_\varphi = \langle W^E_\varphi, R^{E3}_\varphi, V^E_\varphi \rangle$, kde

$sR^{E3}_\varphi t$ iff $K_t \subseteq K_s$

Nechť $\psi \in Fle(MVL)$ obsahuje pouze atomy z $At(\varphi)$. Pokud je ψ platná v $E3$, pak také platí v modelu M^{E3}_φ. Pokud ψ není platná v $E3$ a M je nějaký model logiky $E3$, v němž neplatí ψ, pak postupem zcela stejným jako v předchozím důkazu úplnosti bychom vytvořili p-morfismus z M do M^{E3}_φ pro atomy z $At(\varphi)$. Tedy v modelu M^{E3}_φ platí právě všechny platné formule logiky $E3$ obsahující pouze atomy z $At(\varphi)$.

Věta 4.4.3 *Logika $E3$ je rozhodnutelná.*

4.5 Logika $E4$

Další obměna bude motivována tímto pohledem: Nutné bude nyní to, co je pravdivé ve všech stavech, v nichž je pravda to, co o situaci víme. Tedy formálně definujeme opět tak, že na univerzu W^E pozměníme relaci dosažitelnosti:

$M^{E4} = \langle W^E, R^{E4}, V^E \rangle$ je kripkovský model, kde platí:

$vR^{E4}w$ iff $Z_v \subseteq T_w$.

Takto získaná E-logika opět neobsahuje ani není obsažena v žádné z ostatních. Důležité pro další úvahy bude, že pro každé $w \in W^E$ a pro každou $\varphi \in Fle(MVL)$ platí:

$M^{E4}, w \Vdash \Box\Box\varphi$ iff φ platí v každém světě modelu M^{E4}.

$M^{E4}, w \Vdash \Diamond\Diamond\varphi$ iff φ platí v nějakém světě modelu M^{E4}.

Z toho např. plyne, že pro každou klasicky splnitelnou $\varphi \in Fle(KVL)$ je $\Diamond\Diamond\varphi$ logicky platná formule v $E4$. Není zde ovšem platné schéma (4).

Axiomatizaci získáme tak, že rozšíříme logiku T o schéma:

$(E4)$ $\Diamond\varphi_1 \to \Diamond(\varphi_1 \wedge \Phi^\Diamond \wedge \Box\Phi^\vee)$.

kde $\Phi^{\vee}$ a $\Phi^{\diamond}$ jsou stejné jako v předchozí kapitole – ovšem s tím dodatkem, že formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou splnitelné formule klasické výrokové logiky. Důkaz, že jde o adekvátní kalkul je také podobný důkazu z předchozí kapitoly. Logika $E4$ je opět rozhodnutelná. Konečný model pro množinu atomů G vypadá takto:

$$M_{\varphi}^{E4} = \left\langle W_{\varphi}^{E}, R_{\varphi}^{E4}, V_{\varphi}^{E} \right\rangle, \text{ kde}$$

$$sR_{\varphi}^{E4}t \text{ iff } I_t \in K_s.$$

V této logice však již neplatí obecně uzavřenost na substituce nemodálních formulí. Formule $\diamond\diamond p$ je platná, formule $\diamond\diamond(p \wedge \neg p)$ nikoli. Logika $E4$ je však uzavřená na syntakticky izomorfní substituce ve smyslu kapitoly 3.3.

4.6 Normální formy v E-logikách

Dále se budeme zabývat především logikou $E3$. Pouze okrajově někdy poznamenáme, jak by uvedené úvahy vypadaly pro logiky $E1, E2$ a $E4$. Omezíme se nyní na konečnou sadu atomů $G = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Můžeme tedy vzít libovolnou formuli α, v níž se vyskytují právě tyto atomy a pracovat s modelem M_{α}^{E3}. Řekněme, že m je počet všech ohodnocení atomů z G. Tedy $m = 2^n$. Velikost modelu M_{α}^{E3} je dána tím, že ke každému z m ohodnocení (tj. prvních složek světů) je 2^{m-1} možností, jak utvořit druhou složku. Počet světů modelu M_{α}^{E3} je tedy celkem

$$m2^{m-1} = 2^n 2^{2^n - 1} = 2^{2^n + n - 1}.$$

Budeme se držet značení z důkazu úplnosti pro logiku $E3$. S množinou $Int(G)$ všech ohodnocení atomů z G koresponduje množina všech formulí, které těmto ohodnocením odpovídají. Budeme ji značit H. Tedy

$$H = \left\{\lambda_I^G; I \in Int(G)\right\}.$$

Pro libovolné $w \in W_{\alpha}^{E}$ bude H_w množina formulí odpovídajících ohodnocením z K_w. Tedy

$$H_w = \left\{\lambda_I^G; I \in K_w\right\}$$

Formulí λ_w budeme mínit formuli $\lambda_{I_w}^G$.

O prvcích množiny $Int(G)$ budeme mluvit jako o *stavech věcí. Modální situace* budou prvky množiny W_{α}^{E}. Množiny modálních situací budou *modální intenze.* Každé formuli $\varphi \in Fle(MVL)$ přiřadíme modální intenzi $\|\varphi\|$:

$$\|\varphi\| = \{w \in W^E_\alpha; M^{E3}_\alpha, w \Vdash \varphi\}.$$

Nyní pro libovolné $\varphi, \psi \in Fle(MVL)$ obsahující pouze atomy z G platí:

$$\|\neg\varphi\| = (W^E_\alpha - \|\varphi\|)$$

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\|,$$

$$\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \cup \|\psi\|,$$

$$\|\varphi \rightarrow \psi\| = (W^E_\alpha - \|\varphi\|) \cup \|\psi\|,$$

$$\|\varphi \leftrightarrow \psi\| = (\|\varphi\| \cap \|\psi\|) \cup (W^E_\alpha - (\|\varphi\| \cup \|\psi\|)),$$

$$\|\Box\varphi\| = \{w \in W^E_\alpha; \forall v : K_v \subseteq K_w \Rightarrow v \in \|\varphi\|\},$$

$$\|\Diamond\varphi\| = \{w \in W^E_\alpha; \exists v : K_v \subseteq K_w, v \in \|\varphi\|\}.$$

Dále platí:

$$\models_{E3} \varphi \text{ iff } \|\varphi\| = W^E_\alpha,$$

$$\models_{E3} \varphi \rightarrow \psi \text{ iff } \|\varphi\| \subseteq \|\psi\|,$$

$$\models_{E3} \varphi \leftrightarrow \psi \text{ iff } \|\varphi\| = \|\psi\|.$$

Řekneme, že daná formule je v *základním tvaru* (vzhledem k atomům z G), je-li to formule, která má tvar $\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m$, kde $\psi_0 \in H$, ψ_1 je formule $\Diamond\psi_0$ a pro každou $\chi \in H$ existuje i ($1 \leq i \leq m$) tak, že ψ_i je buď formule $\Diamond\chi$, nebo formule $\neg\Diamond\chi$. Řekneme, že daná formule je v *normální formě* (vzhledem k atomům z G), když je to disjunkce (jedno- či vícečlenná) formulí v základním tvaru. Tedy pro $n = 2$ je např. následující formule v normální formě:

$$((p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\Diamond(\neg p \wedge q))\vee$$

$$\vee((\neg p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(\neg p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(\neg p \wedge q) \wedge \neg\Diamond(p \wedge \neg q) \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)).$$

Lemma 4.6.1 *Ke každé modální intenzi X existuje formule ψ v normální formě tak, že platí $\|\psi\| = X$.*

Důkaz: Je-li I stav věcí, pak k němu existuje formule $\varphi \in H$, která ho popisuje (tj. φ je formule λ^G_I). Platí:

$$\|\varphi\| = \{w \in W^E_\alpha; I = I_w\},$$

$$\|\Diamond\varphi\| = \{w \in W_\alpha^E; I \in K_w\},$$

$$\|\neg\Diamond\varphi\| = \{w \in W_\alpha^E; I \notin K_w\}.$$

Pro libovolnou modální situaci w tedy můžeme vzít formuli χ v základním tvaru, která jednoznačně určuje, jaký stav věcí je roven I_w, a dále jaké stavy věcí jsou a jaké nejsou v K_w. Je to formule $\lambda_w \wedge H_w^\Diamond \wedge (H - H_w)^{\neg\Diamond}$. Pak platí $\|\chi\| = \{w\}$.

Je-li dána modální intenze $X = \{w_1, \ldots, w_k\}$, ke každému i $(1 \leq i \leq k)$ vezmeme formuli χ_i v základním tvaru tak, že $\|\chi_i\| = \{w_i\}$. Formule ψ bude formule $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_k$. Formule ψ je v normální formě a platí $\|\psi\| = X$. Q.E.D.

Věta 4.6.1 *Ke každé formuli $\varphi \in Fle(MVL)$ existuje formule ψ v normální formě tak, že platí $\models_{E3} \psi \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz: Řekněme, že $G = At(\varphi)$. Podle předchozího tvrzení existuje k modální intenzi $\|\varphi\|$ formule ψ v normální formě tak, že $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Pak ale $\models_{E3} \psi \leftrightarrow \varphi$. Q.E.D.

Z toho vyplývá, že v logice $E3$ lze zcela eliminovat vnořené modality, protože formule v normální formě vnořené modality neobsahují. Dalším důsledkem je, že v logice $E3$ pro každé n existuje $2^{2^{2^n+n-1}}$ neekvivalentních formulí na n atomech (pro každou modální intenzi jedna) a každá formule na těchto atomech je ekvivalentní některé z nich.

Pro logiky $E1, E2$ a $E4$ bychom mohli postupovat zcela analogicky. Jediná změna, která však na uvedený postup nemá vliv, je, že pro logiku $E1$ by platilo:

$$\|\Box\varphi\| = \{w \in W_\alpha^E; \forall v : I_v = K_v \subseteq K_w \Rightarrow v \in \|\varphi\|\},$$

$$\|\Diamond\varphi\| = \{w \in W_\alpha^E; \exists v : I_v = K_v \subseteq K_w, v \in \|\varphi\|\}.$$

Pro logiku $E2$ bychom dostali:

$$\|\Box\varphi\| = \|\varphi\| \cap \{w \in W_\alpha^E; \forall v : I_v = K_v \subseteq K_w \Rightarrow v \in \|\varphi\|\},$$

$$\|\Diamond\varphi\| = \|\varphi\| \cup \{w \in W_\alpha^E; \exists v : I_v = K_v \subseteq K_w, v \in \|\varphi\|\}.$$

A pro logiku $E4$:

$$\|\Box\varphi\| = \{w \in W_\alpha^E; \forall v : I_v \in K_w \Rightarrow v \in \|\varphi\|\},$$

$$\|\Diamond\varphi\| = \{w \in W_\alpha^E; \exists v : I_v \in K_w, v \in \|\varphi\|\}.$$

4.7 Kompaktnost E-logik

Nechť je dána nějaká logika L, která je vymezena (tak jako E-logiky) pomocí nějakého jednoho kripkovského modelu $M = \langle W, R, V \rangle$ a pro níž existuje adekvátní hilbertovský kalkul (a tedy i odpovídající si metavlastnosti formulí $\models_L$ a $\vdash_L$). Řekneme, že $Y \subseteq Fle(MVL)$ je *L-splnitelná*, když platí, že:

Existuje $v \in W$ tak, že pro každou $\varphi \in Y$ platí $M, v \Vdash \varphi$.

Řekneme, že $Y \subseteq Fle(MVL)$ je *L-konzistetní*, když pro každou konečnou podmnožinu $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ množiny Y platí:

Není pravda, že $\vdash_L (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow (p \wedge \neg p)$.

L je *silně úplná*, platí-li pro každou $Y \subseteq Fle(MVL)$:

Jestliže je Y L-konzistentní, pak je Y také L-splnitelná.

Řekneme, že L je *kompaktní*, když je pro každou $Y \subseteq Fle(MVL)$ splněna podmínka:

Y je L-splnitelná iff každá konečná $X \subseteq Y$ je L-splnitelná.

Při tomto vymezení (které je převzato z [14], str. 115) a za předpokladu korespondence vlastností $\models_L$ a $\vdash_L$ platí obvyklý vztah mezi silnou úplností a kompaktností.

Lemma 4.7.1 *L je silně úplná iff L je kompaktní.*

Důkaz: 1. Nejprve předpokládejme pro spor, že L je silně úplná, ale není kompaktní. Pak existuje $Y \subseteq Fle(MVL)$, která není L-splnitelná, ale každá její konečná podmnožina je L-splnitelná. Protože je L silně úplná, není Y L-konzistentní. Tedy existuje $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq Y$ tak, že $\vdash_L (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow (p \wedge \neg p)$. Přitom $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ je L-splnitelná a tedy existuje $v \in W$ tak, že $M, v \Vdash \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$. Tedy $M, v \Vdash p \wedge \neg p$, což je spor.

2. Opačnou implikaci dokážeme opět sporem. Předpokládejme, že L je kompaktní, ale není silně úplná. Pak existuje $Y \subseteq Fle(MVL)$, která je L-konzistentní, ale není L-splnitelná. Protože je L kompaktní, není splnitelná nějaká konečná podmnožina $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ množiny Y. Pro každé $v \in W$ tedy platí, že $M, v \Vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. Tedy pro každé $v \in W$ platí $M, v \Vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow (p \wedge \neg p)$. Tedy $\vdash_L (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow (p \wedge \neg p)$. Takže Y není L-konzistentní, což je spor. Q.E.D.

Nyní přistoupíme k logice $E3$. Budeme potřebovat jedno pomocné lemma.

Lemma 4.7.2 *Nechť $\varphi, \psi \in Fle(MVL)$ a ψ je v základním tvaru vzhledem k atomům z $At(\varphi)$. Pak platí, že $\vdash_{E3} \psi \to \varphi$ nebo $\vdash_{E3} \psi \to \neg\varphi$.*

Důkaz: Protože ψ je v základním tvaru, platí, že $\|\psi\| = \{w\}$ pro nějaké $w \in W^E_\varphi$. Pak platí buď $\|\psi\| \subseteq \|\varphi\|$, nebo $\|\psi\| \subseteq \|\neg\varphi\|$. Tedy $\models_{E3} \psi \to \varphi$ nebo $\models_{E3} \psi \to \neg\varphi$. A tedy $\vdash_{E3} \psi \to \varphi$ nebo $\vdash_{E3} \psi \to \neg\varphi$. Q.E.D.

Věta 4.7.1 *Logika $E3$ je silně úplná.*

Důkaz: Předpokládejme, že $Y \subseteq Fle(MVL)$ je konzistentní. Stejnou metodou, jaká se používá v Lindembaumově lemmatu, můžeme Y rozšířit na množinu Y^+, která je také konzistentní a přitom maximální, tj. pro každou formuli jazyka modální výrokové logiky obsahuje buď ji, nebo její negaci. K množině Y^+ vezmeme svět $v = \langle T_v, Z_v \rangle$ modelu M^{E3}, který je vymezen takto:

$$T_v = \{\chi \in Fle(KVL); \chi \in Y^+\}.$$

$$Z_v = \{\chi \in Fle(KVL); \Box\chi \in Y^+\}.$$

Nechť $\varphi \in Fle(MVL)$. V Y^+ existuje právě jedna formule ψ, která je v základním tvaru vzhledem k atomům z $At(\varphi)$ (již na základě klasické výrokové logiky jsou každé dvě takové formule ve sporu, ale je dokazatelná disjunkce všech těchto formulí). Na základě definice světa v je zřejmé, že $M^{E3}, v \Vdash \psi$. Za pomoci předchozího lemmatu dostáváme:

$$\varphi \in Y^+ \text{ iff } \vdash_{E3} \psi \to \varphi \text{ iff } \models_{E3} \psi \to \varphi \text{ iff } M^{E3}, v \Vdash \varphi.$$

Protože φ byla libovolná, platí, že pro každé $\varphi \in Y$ $M^{E3}, v \Vdash \varphi$. Tedy Y je splnitelná. Q.E.D.

Jako důsledek získáváme následující tvrzení.

Věta 4.7.2 *Logika $E3$ je kompaktní.*

Pro logiky $E1, E2$ a $E4$ bychom mohli postupovat naprosto analogicky.

5 Srovnání s jinými logikami

5.1 Sémantické souvislosti E-logik s logikami $S4$ a $S5$

Nebudeme se v této kapitole ani tak zabývat souvislostmi logik ve smyslu vztahů mezi množinami formulí. Spíše se zaměříme na možnost vymezit sémantiku různých logik ve stejném stylu. Sémantika E-logik je vymezena odlišným způsobem, než bývá zvykem. Je dáno jedno univerzum možných světů jakožto dvojic situace-znalost a v tomto univerzu je fixována valuace atomů přirozeným způsobem. Sémantika E-logik se liší pouze relací dosažitelnosti, krerá je však pro každou z nich také jednoznačně určena. Logiky $S4$ a $S5$ by také mohly být vymezeny jediným (kanonickým) modelem.[35] Ale pokusíme se ukázat ještě o něco větší podobnost v možnostech sémantického vymezení, a tím také otevřít možnost analogických interpretací těchto logik. Přestože se E-logiky s logikou $S5$ „míjí“, zatímco např. logika $E3$, na kterou se zaměřujeme především, je rozšířením logiky $S4$, zdá se, že sémantická podobnost E-logik s $S5$ je větší než podobnost s $S4$. Jak nyní ukážeme, logika $S5$ by mohla být vymezena velice podobným způsobem jako E-logiky. Dochází opět pouze ke změně relace dosažitelnosti, která bude vymezena pomocí rovnosti (namísto inkluze, jak je tomu v logice $E3$):

$M^{S5} = \langle W^E, R^{S5}, V^E \rangle$ je kripkovský model, kde platí:

$vR^{S5}w$ iff $Z_v = Z_w$.

Jestliže $Y \subseteq Fle(KVL)$, pak $Y^{\uparrow}$ bude množina všech mk-teorií KVL, které obsahují Y. Následující tvrzení je analogií třetího lemmatu kapitoly 4.4.

Lemma 5.1.1 *Je-li X konečná množina mk-teorií KVL, pak $(\bigcap X)^{\uparrow} = X$.*

Důkaz: Každé mk-teorii KVL odpovídá jedno ohodnocení atomů. Množina

$$K = \bigcup \{Mod(T); T \in X\}$$

je množina těch ohodnocení, které odpovídají mk-teoriím KVL z X. Pak platí, že $Th(K) = \bigcap X$ a tedy také

$$Mod(Th(K)) = \bigcup \left\{Mod(T); T \in (\bigcap X)^{\uparrow}\right\}.$$

[35] Tento model je však vystavěn z mk-teorií příslušných modálních axiomatických systémů. V tom je rozdíl oproti E-logikám a Carnapově modální logice C, kde je kanonický model vystavěn z mk-teorií KVL.

K je konečná množina. Ze třetího lemmatu kapitoly 4.4 máme $Mod(Th(K)) = K$. Tj.

$$\bigcup \left\{Mod(T); T \in (\bigcap X)^{\uparrow}\right\} = \bigcup \left\{Mod(T); T \in X\right\}.$$

To znamená, že $(\bigcap X)^{\uparrow} = X$. Q.E.D.

Věta 5.1.1 *Pro každou $\varphi \in Fle(MVL)$ platí, že $\models_{S5} \varphi$ iff $M^{S5} \Vdash \varphi$.*

Důkaz: 1. Nechť $\models_{S5} \varphi$. Pak φ platí ve všech kripkovských modelech, kde relace dosažitelnosti je relací ekvivalence. Tedy φ platí i v M^{S5}.

2. Předpokládejme, že neplatí $\models_{S5} \varphi$. Pak existuje konečný model $M = \langle W, R, V\rangle$ a $v \in W$ tak, že $R = W \times W$ a $M, v \nVdash \varphi$. Ke každému světu w modelu M vytvoříme svět $f(w) = \left\langle T_{f(w)}, Z_{f(w)}\right\rangle$ modelu M^{S5}:

$$T_{f(w)} = \{\varphi \in Fle(KVL); M, w \Vdash \varphi\},$$

$$Z_{f(w)} = \{\varphi \in Fle(KVL); M \Vdash \varphi\}.$$

Množina $Z_{f(w)}$ je stejná pro všechna $w \in W$. Tuto množinu Z můžeme také vyjádřit takto:

$$Z = \bigcap X, \text{ kde } X = \left\{T_{f(u)}; u \in W\right\}.$$

Nyní ukážeme, že f je p-morfismus. Jistě f zachovává platnost atomických formulí a pokud vRw, pak také $f(v)R^{S5}f(w)$, protože druhá složka světů $f(v), f(w)$ je totožná. Předpokládejme, že $v \in W$, $u \in W^E$ a platí $f(v)R^{S5}u$. Stačí dokázat, že existuje $w \in W$ tak, že $f(w) = u$. Ale kdyby takový svět neexistoval, pak by platilo $(\bigcap X)^{\uparrow} \neq X$, což podle předchozího tvrzení neplatí.

Protože f je p-morfismus, platí $M^{S5}, f(v) \nVdash \varphi$ a tedy i $M^{S5} \nVdash \varphi$. Q.E.D.

Zdá se, že pro logiku $S4$ analogické vymezení není možné. Avšak je zde možnost alespoň se přiblížit stylu, v němž jsou koncipovány E-logiky, přijmeme-li určitý ústupek. Tento ústupek bychom mohli interpretovat jako odstranění předpokladu, že musí být všechny modální situace realizovatelné. Na formální straně to bude vypadat tak, že vyjdeme z logiky $E3$, ale připustíme jako možné univerzum libovolnou podmnožinu univerza W^E. Nebude se tedy již jednat o logiku jediného modelu, ale o logiku jisté třídy modelů.

$S4$-modelem budeme rozumět každý kripkovský model, v němž je relace dosažitelnosti reflexivní a tranzitivní. $E3^{\downarrow}$-modelem budeme rozumět každý kripkovský model $M = \langle W, R, V\rangle$, kde platí:

$W \subseteq W^E$,

vRw iff $vR^{E3}w$ pro každé $v, w \in W$,

$V(p) = W \cap V^E(p)$ pro každý atom p.

Definujeme: $\models_{E3^\downarrow} \varphi$ iff pro každý $E3^\downarrow$-model M platí $M \Vdash \varphi$.

Věta 5.1.2 *Pro každou $\varphi \in Fle(MVL)$ platí, že $\models_{S4} \varphi$ iff $\models_{E3^\downarrow} \varphi$.*

Důkaz: 1. Předpokládejme $\models_{S4} \varphi$. Protože každý $E3^\downarrow$-model je také $S4$-modelem, platí $\models_{E3^\downarrow} \varphi$.

2. Nyní předpokládejme, že neplatí $\models_{S4} \varphi$. Pak existuje konečný $S4$-model $M = \langle W, R, V \rangle$ a $v \in W$ tak, že $M, v \nVdash \varphi$. Na základě modelu M sestrojíme $E3^\downarrow$-model, v němž také neplatí φ. Nejdříve však sestrojíme $S4$-model $M' = \langle W, R, V' \rangle$, který je rámcově shodný s modelem M, jen v něm změníme valuaci V. Je-li $p \in At(\varphi)$, pak $V'(p) = V(p)$. Pokud $p \notin At(\varphi)$, pak $V'(p) = W$. Protože v M' se změnila pouze valuace atomů, které se ve φ nevyskytují, platí stále $M', v \nVdash \varphi$. Nechť $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ a $p_1, \ldots, p_m \in At - At(\varphi)$. Nyní ke každému $w \in W$ sestrojíme svět $f(w) = \langle T_{f(w)}, Z_{f(w)} \rangle$ hledaného $E3^\downarrow$-modelu:

$T_{f(w)} = \{\chi \in Fle(KVL); M', w \Vdash \chi\}$,

$Z_{f(w)} = \{p_i; w_i R w\}$.

Díky předchozí úpravě modelu jistě platí, že $Z_{f(w)} \subseteq T_{f(w)}$. Tedy $f(w) \in W^E$. Můžeme definovat $E3^\downarrow$-model $M^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$:

$W^* = \{f(w); w \in W\}$,

sR^*t iff $Z_s \subseteq Z_t$,

$V^*(p) = \{s \in W^*; p \in T_s\}$.

Opět ukážeme, že f je p-morfismus modelů M' a M^*: 1. $M', w \Vdash p$ iff $p \in T_{f(w)}$ iff $M^*, f(w) \Vdash p$. 2. Nechť vRw. Pak protože R je tranzitivní, platí $Z_{f(v)} \subseteq Z_{f(w)}$. 3. Nechť $f(w_i) R^* f(w_j)$, tj. $Z_{f(w_i)} \subseteq Z_{f(w_j)}$. Dokážeme, že pak také $w_i R w_j$. Pro spor předpokládejme, že neplatí $w_i R w_j$. Pak díky reflexivitě $p_i \in Z_{f(w_i)}$, ale $p_i \notin Z_{f(w_j)}$. Tedy neplatí $Z_{f(w_i)} \subseteq Z_{f(w_j)}$, což je spor. Protože f je p-morfismus, neplatí $\models_{E3^\downarrow} \varphi$. Q.E.D.

V důkazu jsme využili předpokladu, že máme k dispozici nekonečné množství atomů. Bez tohoto předpokladu se nelze obejít. Kdybychom se omezili na konečnou množinu atomů G a vymezili pro ně sémantiku stejným způsobem, neodpovídala by již logice $S4$. Mohli bychom totiž vzít nějaké množiny formulí H_1, H_2 takové, že $H_1 \subset H_2 \subseteq H$, kde H je stále množina všech formulí odpovídajících ohodnocením atomů z G. Pak by v takto vymezené sémantice platila následující formule: $(\Diamond(H_2^{\Diamond} \wedge (H - H_2)^{\neg\Diamond}) \wedge \Diamond(H_1^{\Diamond} \wedge (H - H_1)^{\neg\Diamond})) \rightarrow \Diamond(H_2^{\Diamond} \wedge (H - H_2)^{\neg\Diamond} \wedge \Diamond(H_1^{\Diamond} \wedge (H - H_1)^{\neg\Diamond}))$. Tato formule však neplatí v logice $S4$. Nejednalo by se tedy již o adekvátní sémantiku pro logiku $S4$.

Vrátíme se nyní ještě k logice $S5$. Sémantická podobnost je skutečně značná. Můžeme říci, že logiky $E1, E2, E3, E4, S5$ patří do stejné rodiny logik. Pro jednoduchost se omezíme opět na konečnou množinu atomů G. Zřejmě bychom mohli také pro logiku $S5$ vytvořit model M_α^{S5} podobně jako pro E-logiky a provést pro ni úplně stejně všechny úvahy předchozích dvou kapitol. Jediný (a v jistém smyslu nepodstatný) rozdíl by byl v tom, že modality operují jiným způsobem na modálních intenzích. Pro $S5$ by platilo:

$$\|\Box\varphi\| = \big\{w \in W_\alpha^E; \forall v : K_v = K_w \Rightarrow v \in \|\varphi\|\big\},$$

$$\|\Diamond\varphi\| = \big\{w \in W_\alpha^E; \exists v : K_v = K_w, v \in \|\varphi\|\big\}.$$

Pohled, který na spojky těchto logik nahlíží jako na funkce, které modálním intenzím přiřazují modální intenze, smazává podstatný rozdíl mezi modálními a jinými operátory. Mohli bychom také vytvořit logiku, v níž by bylo integrováno všech pět modalit těchto logik jako odlišné spojky ($\Box^{E1}$, $\Box^{E2}$, $\Box^{E3}$, $\Box^{E4}$, $\Box^{S5}$ – s odpovídajícími protějšky modality možnosti) interpretované jako odlišné funkce na modálních intenzích v univerzu W_α^E (které je všem společné). Tyto spojky by byly dokonce vzájemně definovatelné. Když totiž vezmeme dvě formule v normální formě, které se liší pouze v tom, že modality v jedné mají index nějaké z právě zvažovaných čtyř logik, kdežto modality druhé mají index některé jiné z těchto logik, pak jsou tyto formule logicky ekvivalentní v logice obsahující všechny čtyři druhy modalit. Tedy ke každé formuli obsahující jeden druh modalit (řekněme L_1) můžeme vzít její normální formu, v ní přeznačit indexy modalit na libovolný jiný typ modality (řekněme L_2) a získáváme logicky ekvivalentní formule. Takto můžeme definovat libovolnou formuli jazyka obsahujícího vedle klasických spojek pouze modality $\Diamond^{L_1}, \Box^{L_1}$ pomocí nějaké formule, která obsahuje z modalit pouze $\Diamond^{L_2}, \Box^{L_2}$. Vztahy mezi těmito modalitami jsou tedy v jistém smyslu podobné jako např. vztah mezi disjunkcí a implikací v klasické výrokové logice, kde jednu můžeme definovat pomocí druhé.

5.2 Vztah $E4$ k C a další obměna

Logika C je obsažena v logice $E4$ v podobném smyslu, v jakém je klasická logika obsažena v intuicionistické, tj. skrze nějaký překlad. Tento překlad, který označíme písmenem „D“, zdvojí všechny modality v překládané formuli jazyka modální výrokové logiky. Tedy můžeme definovat:

$D(p) = p$, pro každý atom p.

$D(\neg\varphi) = \neg D(\varphi)$.

$D(\varphi \wedge \psi) = D(\varphi) \wedge D(\psi)$.

$D(\Box\varphi) = \Box\Box D(\varphi)$.

Pak platí následující tvrzení.

Věta 5.2.1 *Nechť* $\varphi \in Fle(MVL)$. *Pak* $\vdash_C \varphi$ *iff* $\vdash_{E4} D(\varphi)$.

Důkaz: Vezměme model $M^C = \left\langle W^E, R^C, V^E \right\rangle$, kde $R^C = W^E \times W^E$. V tomto modelu platí právě všechny formule platné v logice C, protože druhá složka světů se stává irelevantní. Nyní stačí dokázat indukcí dle složitosti φ, že pro libovolné $w \in W^E$ platí $M^C, w \Vdash \varphi$ iff $M^{E4}, w \Vdash D(\varphi)$. Atomy a spojky $\neg$ a $\wedge$ jsou přímočaré. Nechť $\varphi = \Box\psi$. Pak $M^C, w \Vdash \Box\psi$ iff pro každé $v \in W^E$ platí $M^C, v \Vdash \psi$ iff pro každé $v \in W^E$ platí $M^{E4}, v \Vdash D(\psi)$ iff $M^{E4}, w \Vdash \Box\Box D(\psi)$ iff $M^{E4}, w \Vdash D(\Box\psi)$. Q.E.D.

Zde se nabízí vytvoření logiky, která je v podobném vztahu k logice $E4$, jako je logika $S5$ k C. Místo jedné, fixně dané množiny Int všech interpretací vezmeme v úvahu všechny její neprázdné podmnožiny. Pro libovolnou neprázdnou $X \subseteq Int$ definujeme zvláštní model $M^X = \left\langle W^X, R^X, V^X \right\rangle$, kde

$W^X = \{w; w = \langle I_w, K_w \rangle, I_w \in K_w \subseteq X\}$,

$sR^X t$ iff $I_t \in K_s$,

$V^X(p) = \left\{ s \in W^X; I_s(p) = 1 \right\}$ pro každý atom p.

Logiku určenou touto třídou modelů nazveme $E4-$. Definujeme:

$$\models_{E4-} \varphi \text{ iff pro každou neprázdnou } X \subseteq Int \text{ platí } M^X \Vdash \varphi.$$

Zjevně pak platí následující tvrzení, které vyjadřuje, že logika $S5$ je vnořená v logice $E4-$ skrze překlad D – nebo jinými slovy to, že modalita logiky $S5$ je odvozenou modalitou v logice $E4-$.

Věta 5.2.2 *Nechť* $\varphi \in Fle(MVL)$. *Pak* $\vdash_{S5} \varphi$ *iff* $\vdash_{E4-} D(\varphi)$.

Axiomatizaci logiky $E4-$ získáme tak, že k logice T přidáme schémata

1. $\Box\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\Box\varphi$,
2. $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\Diamond\varphi$,

kde φ může být libovolná formule z množiny $Fle(MVL)$. Dále přidáme obměnu schématu ($E3$):

3. $(\Diamond\varphi_1 \wedge \Phi^{\Diamond\Diamond}) \rightarrow \Diamond(\varphi_1 \wedge \Phi^{\Diamond} \wedge \Box\Phi^{\vee})$.

Schéma se jako v $E3$ vztahuje na libovolné formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fle(KVL)$. $\Phi^{\Diamond\Diamond}$ je formule $\Diamond\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\Diamond\varphi_n$.

Důkaz, že se jedná skutečně o kalkul logiky $E4-$ by mohl být proveden analogicky k důkazu úplnosti logiky $E3$.

Korespondenci vztahů mezi $S5$ a C a mezi $E4-$ a $E4$ zvýrazňuje ještě následující fakt. Výše jsme uvedli důkaz, že C lze získat tak, že k $S5$ přidáme všechny formule tvaru $\Diamond\varphi$, kde φ vyjadřuje nějaký stav věcí, tj. je konjunkcí literálů obsahujících různé atomy. Analogicky: Pokud bychom přidali schéma $\Diamond\Diamond\varphi$ (pro právě zmíněné formule φ) k $E4-$, získali bychom alternativní kalkul logiky $E4$.

V logikách $E4-$ a $E4$ jsou rozlišeny modality $\Box$ a $\Box\Box$. Nevztahuje se na ně tedy Beckerova kritika směšování zdvojených modalit s jednoduchými (viz kapitola 2.3).

5.3 Vztah $E3$ k intuicionistické logice

Interpretace logiky $E3$ má mnoho společných rysů s interpretací intuicionistické logiky. V obou případech hraje důležitou roli proces rozšiřujícího se poznávání. Relace dosažitelnosti je interpretována jako zachycení tohoto procesu. Dosažitelný je takový stav, v němž je množství získaných informací rozšířeno. Pokusíme se nyní o formální srovnání intuicionistické logiky a $E3$.

Jazyk intuicionistické výrokové logiky obsahuje jako základní spojky $\neg$, $\to$, $\wedge$, $\vee$, které jsou zde vzájemně nedefinovatelné, a neobsahuje modality. Spojka $\leftrightarrow$ je definována běžným způsobem pomocí implikace a konjunkce. $Fle(IVL)$ bude množina formulí tohoto jazyka. Existuje známá korespondence mezi intuicionistickou logikou a logikou $S4$. Aby bylo možné srovnat intuicionistickou logiku s logikou $S4$, používá se překladu, který každé formuli $\varphi \in Fle(IVL)$ přiřadí formuli $Tr(\varphi) \in Fle(MVL)$. Překlad je vymezen rekurzivně:

$Tr(p) = \Box p$, pro každý atom p.

$Tr(\neg\varphi) = \Box\neg Tr(\varphi)$.

$Tr(\varphi \to \psi) = \Box(Tr(\varphi) \to Tr(\psi))$.

$Tr(\varphi \wedge \psi) = Tr(\varphi) \wedge Tr(\psi)$.

$Tr(\varphi \vee \psi) = Tr(\varphi) \vee Tr(\psi)$.

Korespondence intuicionistické logiky a $S4$ je dána tím, že pro každou formuli $\varphi \in Fle(IVL)$ platí, že φ je intuicionisticky platná právě tehdy, když $Tr(\varphi)$ je platná v logice $S4$. Tedy množina

$$\{\varphi \in Fle(IVL); \models_{S4} Tr(\varphi)\}.$$

je množinou všech intuicionisticky platných formulí. Položíme si nyní otázku, jaká množina formulí jazyka intuicionistické výrokové logiky je při tomto překladu vymezena logikou $E3$. Pokusíme se tedy pomocí nějakého kalkulu vymezit množinu

$$\{\varphi \in Fle(IVL); \models_{E3} Tr(\varphi)\}.$$

Prvním pozorováním je, že tato množina bude obsahovat všechny intuicionisticky platné formule, neboť $E3$ je silnější než $S4$. Jistě však bude obsahovat také něco navíc a otázkou nyní je co. Např. obsahuje formuli $\neg\neg p \to p$, protože jejím překladem je formule $\Box(\Box\Diamond\Box p \to \Box p)$, která je platná v $E3$. Kdyby tedy tato množina byla uzavřena na substituci, obsahovala by všechny tautologie klasické výrokové logiky, neboť je uzavřena na modus ponens a přidáním schématu $\neg\neg\varphi \to \varphi$ k intuicionistické výrokové logice obdržíme klasickou výrokovou logiku. Zvažovaná množina však na substituci uzavřena není, protože např. formule $\neg\neg(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg p)$ v ní není obsažena. Není v ní obsažena ani formule, která je nejdůležitější intuicionisticky odmítanou formulí, totiž princip vyloučeného třetího: $p \vee \neg p$. Překlad této formule je $\Box p \vee \Box\neg\Box p$. Tato formule v $E3$ neplatí.

Za základ kalkulu, kterým množinu vymezíme, vezmeme nějaký vhodný kalkul pro intuicionistickou logiku, např. ten, který je uvedený v [29], str. 26 a 59. Obohatíme ho o dvě schémata: Pokud $\varphi, \psi, \chi \in Fle(IVL)$ a φ neobsahuje disjunkci, pak následující formule přidáme mezi axiomy:

(+) $\neg\neg\varphi \to \varphi$,

(++) $(\varphi \to (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi))$.

Tím došlo ke značnému zesílení intuicionistické logiky. Spojky negace, implikace a konjunkce se chovají klasicky. Přesněji řečeno, díky přidání schématu (+) je v tomto kalkulu dokazatelná každá klasická tautologie neobsahující disjunkci. Schéma (++), tj. jistým způsobem omezená distributivita implikace vůči disjunkci, také není platným principem v intuicionistické logice. Přesto tvoří intuicionistická logika základ, ze kterého jsme vyšli, a proto tuto logiku nazveme $IL+$. $\vdash_{IL+} \varphi$ tedy znamená, že formule φ je dokazatelná v právě definovaném kalkulu.

K předvedení, že $IL+$ skutečně odpovídá logice $E3$ vzhledem k překladu Tr, budeme potřebovat několik pomocných tvrzení. Nejdříve ukážeme, že skrze překlad Tr získáváme jen jistý spcifický typ modálních formulí.

Lemma 5.3.1 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$. Pak $\models_{E3} Tr(\varphi) \leftrightarrow \Box Tr(\varphi)$.*

Důkaz: Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule φ. Celý postup by mohl být proveden již v $S4$.

1. Pro každý atom p je $Tr(p) = \Box p$. Tedy formule $Tr(p) \leftrightarrow \Box Tr(p)$ je totožná s formulí $\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$, která je platná v $E3$.

2. Předpokládejme, že pro formule $\psi, \chi \in Fle(IVL)$ je tvrzení dokázáno. a) Dokážeme, že tvrzení platí pro $\neg\psi$. Následující formule jsou v $E3$ ekvivalentní:

$Tr(\neg\psi)$,

$\Box\neg Tr(\psi)$,

$\Box\Box\neg Tr(\psi)$,

$\Box Tr(\neg\psi)$.

b) Dokážeme, že tvrzení platí pro $\psi \to \chi$. Následující formule jsou v $E3$ ekvivalentní:

$$Tr(\psi \to \chi),$$

$$\Box(Tr(\psi) \to Tr(\chi)),$$

$$\Box\Box(Tr(\psi) \to Tr(\chi)),$$

$$\Box Tr(\psi \to \chi).$$

c) Dokážeme, že tvrzení platí pro $\psi \wedge \chi$. Následující formule jsou v $E3$ ekvivalentní:

$$Tr(\psi \wedge \chi),$$

$$Tr(\psi) \wedge Tr(\chi),$$

$$\Box Tr(\psi) \wedge \Box Tr(\chi),$$

$$\Box(Tr(\psi) \wedge Tr(\chi)),$$

$$\Box Tr(\psi \wedge \chi).$$

d) Dokážeme, že tvrzení platí pro $\psi \vee \chi$. K tomu postačí, že dokážeme $\models_{E3} Tr(\psi \vee \chi) \to \Box Tr(\psi \vee \chi)$. Uvedeme posloupnost formulí, jejíž každý člen implikuje v $E3$ člen následující:

$$Tr(\psi \vee \chi),$$

$$Tr(\psi) \vee Tr(\chi),$$

$$\Box Tr(\psi) \vee \Box Tr(\chi),$$

$$\Box(Tr(\psi) \vee Tr(\chi)),$$

$$\Box Tr(\psi \vee \chi).$$

Tím je důkaz dokončen. Q.E.D.

Nyní se opět omezíme na konečnou množinu atomů G a na model M_α^{E3} pro vhodné α. Řekneme, že modální intenze X je *uzavřená*, když je prázdná nebo když existuje $v \in W_\alpha^E$ tak, že pro libovolné $w \in W_\alpha^E$ platí:

$w \in X$ iff $K_w \subseteq K_v$.

Lemma 5.3.2 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$ obsahuje pouze atomy z G. Pak platí, že $\|Tr(\varphi)\|$ je uzavřená iff $\models_{E3} \Box\Diamond Tr(\varphi) \to Tr(\varphi)$.*

Důkaz: 1. Nechť $\|Tr(\varphi)\|$ je uzavřená. Pak se jedná buď o prázdnou množinu a to znamená, že platí $\models_{E3} \Box\Diamond Tr(\varphi) \to Tr(\varphi)$. Nebo existuje nějaké $v \in W^E_\alpha$ tak, že pro libovolné $w \in W^E_\alpha$ platí: $w \in \|Tr(\varphi)\|$ iff $K_w \subseteq K_v$. Nechť $u \in W^E_\alpha$ a platí $M^{E3}_\alpha, u \Vdash \Box\Diamond Tr(\varphi)$. Pak pro každé $I \in K_u$ platí, že $M^{E3}_\alpha, \langle I, \{I\}\rangle \Vdash Tr(\varphi)$. To může nastat pouze když $K_u \subseteq K_v$. To znamená, že $M^{E3}_\alpha, u \Vdash Tr(\varphi)$.

2. Nechť $\models_{E3} \Box\Diamond Tr(\varphi) \to Tr(\varphi)$. Vezměme v takové, že

$$K_v = \big\{I \in Int(G); M^{E3}_\alpha, \langle I, \{I\}\rangle \Vdash Tr(\varphi)\big\}.$$

Jestliže takové v neexistuje, pak musí být $\|Tr(\varphi)\|$ prázdná (a tedy uzavřená), neboť díky předchozímu lemmatu víme, že platí-li někde $Tr(\varphi)$, pak musí platit také ve všech dosažitelných koncových světech. Jestliže takové v existuje, dokážeme, že pro každé $w \in W^E_\alpha$ platí: $w \in \|Tr(\varphi)\|$ iff $K_w \subseteq K_v$. Nechť nejprve $w \in \|Tr(\varphi)\|$. Pak podle předchozího lemmatu $M^{E3}_\alpha, w \Vdash \Box Tr(\varphi)$ a tedy pro každé $I \in K_w$ platí, že $M^{E3}_\alpha, \langle I, \{I\}\rangle \Vdash Tr(\varphi)$. Tedy $K_w \subseteq K_v$. Nechť naopak $K_w \subseteq K_v$. Pak platí, že $M^{E3}_\alpha, w \Vdash \Box\Diamond Tr(\varphi)$ a díky předpokladu platí také $M^{E3}_\alpha, w \Vdash Tr(\varphi)$, tj. $w \in \|Tr(\varphi)\|$. Tedy $\|Tr(\varphi)\|$ je uzavřená. Q.E.D.

Lemma 5.3.3 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$ obsahuje pouze atomy z G. Pak platí, že $\|Tr(\varphi)\|$ je uzavřená iff $\models_{E3} Tr(\neg\neg\varphi \to \varphi)$.*

Důkaz: Platí, že $\models_{E3} Tr(\neg\neg\varphi \to \varphi)$ iff $\models_{E3} \Box(\Box\Diamond Tr(\varphi) \to Tr(\varphi))$ iff $\models_{E3} \Box\Diamond Tr(\varphi) \to Tr(\varphi)$. Tvrzení pak plyne z předchozího lemmatu. Q.E.D.

Lemma 5.3.4 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$ obsahuje pouze atomy z G a neobsahuje disjunkci. Pak platí, že $\|Tr(\varphi)\|$ je uzavřená.*

Důkaz: Budeme postupovat indukcí podle složitosti φ:

1. Pro každý atom $p \in G$ je $\|Tr(p)\| = \|\Box p\|$. Vezmeme-li $v \in W^E_\alpha$ takové, že $K_v = \{I \in Int(G); I(p) = 1\}$, pak pro každé $w \in W^E_\alpha$ platí, že $w \in \|\Box p\|$ iff $K_w \subseteq K_v$. Tedy $\|\Box p\|$ je uzavřená.

2. Předpokládejme, že $\psi, \chi \in Fle(IVL)$ na atomech G neobsahují disjunkci a platí, že $\|Tr(\psi)\|, \|Tr(\chi)\|$ jsou uzavřené modální intenze. Předpokládejme, že existují $v, u \in W^E_\alpha$ tak, že pro každé $w \in W^E_\alpha$ platí:

$w \in \|Tr(\psi)\|$ iff $K_w \subseteq K_v$,

$w \in \|Tr(\chi)\|$ iff $K_w \subseteq K_u$.

a) Nejprve dokážeme indukční krok pro negaci. Vezměme $s \in W_\alpha^E$ tak, že $K_s = Int(G) - K_v$. Pokud takové s neexistuje, je $\|Tr(\neg\psi)\|$ prázdná a tedy uzavřená. Existuje-li, dokážeme, že pro každé $w \in W_\alpha^E$ platí:

$w \in \|Tr(\neg\psi)\|$ iff $K_w \subseteq K_s$.

$\|Tr(\neg\psi)\| = \|\Box\neg Tr(\psi)\|$. Nechť nejprve $w \in \|\Box\neg Tr(\psi)\|$. Tedy je-li $I \in K_w$, pak $I \notin K_v$ (protože jinak by $w \in \|\Diamond Tr(\psi)\|$), tj. $I \in K_s$. Nechť naopak $K_w \subseteq K_s$. Pak pro žádné $t \in W_\alpha^E$ takové, že $wR_\alpha^{E3}t$ neplatí $K_t \subseteq K_v$. Tedy $w \in \|\Box\neg Tr(\psi)\|$. Tedy $\|Tr(\neg\psi)\|$ je uzavřená.

b) Nyní dokážeme indukční krok pro implikaci. Vezměme $s \in W_\alpha^E$ tak, že $K_s = \{I \in Int(G); I \notin K_v - K_u\}$. Pokud takové s neexistuje, je $\|Tr(\psi \to \chi)\|$ prázdná a tedy uzavřená. Existuje-li, dokážeme, že pro každé $w \in W_\alpha^E$ platí:

$w \in \|Tr(\psi \to \chi)\|$ iff $K_w \subseteq K_s$.

$\|Tr(\psi \to \chi)\| = \|\Box(Tr(\psi) \to Tr(\chi))\|$. Nechť $w \in \|\Box(Tr(\psi) \to Tr(\chi))\|$ a $I \in K_w$. Kdyby $I \in K_v - K_u$, pak by $w \in \|\Diamond(Tr(\psi) \wedge \neg Tr(\chi))\|$, což by byl spor. Tedy $I \in K_s$. Nechť naopak $K_w \subseteq K_s$. Pak pro každé $t \in W_\alpha^E$ takové, že $wR_\alpha^{E3}t$ platí $K_t \subseteq K_u$ nebo neplatí $K_t \subseteq K_v$ (kdyby to nebyla pravda, existovalo by $I \in K_t \subseteq K_w \subseteq K_s$ tak, že $I \in K_v - K_u$). To znamená, že $M_\alpha^{E3}, t \not\Vdash Tr(\psi)$ nebo $M_\alpha^{E3}, t \Vdash Tr(\chi)$. Tedy $w \in \|\Box(Tr(\psi) \to Tr(\chi))\|$. Tím je dokázáno, že $\|Tr(\psi \to \chi)\|$ je uzavřená.

c) Nakonec dokážeme indukční krok pro konjunkci. Vyplyne z toho, že průnik uzavřených modálních intenzí je uzavřená modální intenze. Vezměme $s \in W_\alpha^E$ tak, že $K_s = K_v \cap K_u$. Pokud takové s neexistuje, je $\|Tr(\psi \wedge \chi)\|$ prázdná a tedy uzavřená. Existuje-li, platí pro každé $w \in W_\alpha^E$:

$w \in \|Tr(\psi \wedge \chi)\|$ iff $w \in \|Tr(\psi)\| \cap \|Tr(\chi)\|$ iff $K_w \subseteq K_s$.

Tím je dokázáno, že $\|Tr(\psi \wedge \chi)\|$ je uzavřená.

Indukční kroky bychom mohli provést i v případě, že by některá z intenzí $\|Tr(\psi)\|, \|Tr(\chi)\|$ byla prázdná. Q.E.D.

Nyní již můžeme dokázat korektnost schémat (+) a (++).

Lemma 5.3.5 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$ je taková, že neobsahuje disjunkci. Pak platí, že $\models_{E3} Tr(\neg\neg\varphi \to \varphi)$.*

Důkaz: Zvolíme-li za G množinu $At(\varphi)$, plyne tvrzení z předchozích dvou lemmat. Q.E.D.

Lemma 5.3.6 *Nechť $\varphi, \psi, \chi \in Fle(IVL)$ a φ neobsahuje disjunkci. Pak platí, že $\models_{E3} Tr((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi)))$.*

Důkaz: Formule $Tr((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi)))$ je totožná s formulí $\Box(\Box(Tr(\varphi) \to (Tr(\psi) \vee Tr(\chi))) \to (\Box(Tr(\varphi) \to Tr(\psi)) \vee \Box(Tr(\varphi) \to Tr(\chi))))$. Tato formule platí v $E3$ právě tehdy, když zde platí formule $(\Diamond(Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\psi)) \wedge \Diamond(Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\chi))) \to \Diamond(Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\psi) \wedge \neg Tr(\chi))$. Její platnost dokážeme. Nechť G je množina atomů vyskytujících se ve formulích φ, ψ, χ. Nechť $w \in W_\alpha^E$ a platí

$$M_\alpha^{E3}, w \Vdash \Diamond(Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\psi)) \wedge \Diamond(Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\chi)).$$

Tedy existují světy $u, v \in W_\alpha^E$ takové, že $K_u \subseteq K_w$ a $K_v \subseteq K_w$ a platí

$$M_\alpha^{E3}, u \Vdash Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\psi),$$

$$M_\alpha^{E3}, v \Vdash Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\chi).$$

Mohu vzít $s \in W_\alpha^E$ takový, že $K_s = K_v \cup K_u$ (takový svět jistě existuje). Podle čtvrtého lemmatu je $\|Tr(\varphi)\|$ uzavřená, neboť φ neobsahuje disjunkci. Z toho plyne, že v s platí $Tr(\varphi)$. Navíc $K_s \subseteq K_w$. Tedy

$$M_\alpha^{E3}, w \Vdash \Diamond(Tr(\varphi) \wedge \Diamond\neg Tr(\psi) \wedge \Diamond\neg Tr(\chi)).$$

V $E3$ je formule $\Diamond\neg Tr(\psi)$ ekvivalentní s $\neg\Box Tr(\psi)$ a ta je podle prvního lemmatu ekvivalentní s $\neg Tr(\psi)$. To samé platí pro formuli $\Diamond\neg Tr(\chi)$. Tedy

$$M_\alpha^{E3}, w \Vdash \Diamond(Tr(\varphi) \wedge \neg Tr(\psi) \wedge \neg Tr(\chi)).$$

Tím je důkaz dokončen. Q.E.D.

Lemma 5.3.7 *Nechť $\varphi, \psi, \chi \in Fle(IVL)$. Následující formule jsou dokazatelné v $IL+$:*

a) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

b) $((\varphi \vee \psi) \to \chi) \leftrightarrow ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$,

c) $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$.

Pokud φ neobsahuje disjunkci, tak je v $IL+$ dokazatelná také formule:

d) $(\varphi \to (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi))$.

Důkaz: Formule a)-c) jsou dokazatelné již v intuicionistické logice, jak lze ověřit jednoduše sémanticky. Jedna implikace formule d) je také dokazatelná v intuicionistické logice a druhá je zajištěna schématem (++). Q.E.D.

Nechť $\vartheta \in Fle(IVL)$. Řekneme, že ϑ je v *disjunktivním tvaru*, když $\vartheta = \vartheta_1 \vee \ldots \vee \vartheta_k$ $(k \geq 1)$ a formule $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ neobsahují disjunkci.

Lemma 5.3.8 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$. Pak existuje formule ϑ v disjunktivním tvaru tak, že $\vdash_{IL+} \varphi \leftrightarrow \vartheta$.*

Důkaz: Budeme postupovat opět indukcí podle složitosti formule φ:

Každý atom p je sám v disjunktivním tvaru. Předpokládejme, že $\psi, \chi \in Fle(IVL)$ a platí:

$$\vdash_{IL+} \psi \leftrightarrow (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k)\ (k \geq 1),$$

$$\vdash_{IL+} \chi \leftrightarrow (\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l)\ (l \geq 1),$$

kde formule $\psi_1, \ldots, \psi_k, \chi_1, \ldots, \chi_l$ neobsahují disjunkci. Postupně ukážeme jednotlivé indukční kroky.

a) Negace: Následující formule jsou dokazatelně ekvivalentní v $IL+$:

1. $\neg\psi$,
2. $\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k)$,
3. $\neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_k$.

Přechod od 2. ke 3. formuli je zajištěn bodem a) předchozího lemmatu. 3. formule neobsahuje disjunkci a je tedy v disjunktivním tvaru.

b) Implikace: Následující formule jsou dokazatelně ekvivalentní v $IL+$:

1. $\psi \to \chi$,
2. $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k) \to (\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l)$,
3. $\bigwedge_{i=1}^{k}(\psi_i \to (\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l))$,

4. $\bigwedge_{i=1}^{k}((\psi_i \to \chi_1) \vee \ldots \vee (\psi_i \to \chi_l))$,

5. $\bigvee_{i_1=1}^{l} \ldots \bigvee_{i_k=1}^{l}((\psi_1 \to \chi_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (\psi_k \to \chi_{i_k}))$.

Ekvivalence jsou zajištěny předchozím lemmatem: přechod od 2. ke 3. formuli je zajištěn bodem b), přechod od 3. ke 4. formuli je zajištěn bodem d) a konečně přechod od 4. k 5. formuli je zajištěn bodem c). 5. formule je v disjunktivním tvaru.

c) Konjunkce: Následující formule jsou dokazatelně ekvivalentní v $IL+$:

1. $\psi \wedge \chi$,

2. $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k) \wedge (\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l)$,

3. $\bigvee_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{l}(\psi_i \wedge \chi_j)$.

Přechod od 2. ke 3. formuli je zajištěn bodem c) předchozího lemmatu. 3. formule je v disjunktivním tvaru.

d) Disjunkce: Následující formule jsou dokazatelně ekvivalentní v $IL+$:

1. $\psi \vee \chi$,

2. $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k \vee \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l$.

2. formule je v disjunktivním tvaru. Q.E.D.

Lemma 5.3.9 *Nechť $X_1, \ldots, X_k$ ($k \geq 1$) jsou uzavřené modální intenze a platí $X_1 \cup \ldots \cup X_k = W_\alpha^E$. Pak pro nějaké i takové, že $1 \leq i \leq k$, platí, že $X_i = W_\alpha^E$.*

Důkaz: Vezměme nějaký svět $w \in W_\alpha^E$ takový, že $K_w = Int(G)$. Protože $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = W_\alpha^E$, existuje i ($1 \leq i \leq k$) tak, že $w \in X_i$. Protože X_i je uzavřená, platí pro každé $v \in W_\alpha^E$, že $v \in X_i$ (neboť $K_v \subseteq K_w$). Q.E.D.

Nyní již máme vše připraveno k důkazu hlavního tvrzení této kapitoly.

Věta 5.3.1 *Nechť $\varphi \in Fle(IVL)$. Pak $\vdash_{IL+} \varphi$ iff $\models_{E3} Tr(\varphi)$.*

Důkaz: 1. (korektnost) Logika $E3$ obsahuje logiku $S4$, tedy překlad všech intuicionistických axiomů platí v $E3$. Platnost překladu schémat (+) a (++) byla dokázána v pátém a šestém lemmatu. Navíc, jestliže $\models_{E3} Tr(\psi)$ a $\models_{E3} Tr(\psi \to \chi)$, pak také $\models_{E3} Tr(\chi)$. Tím je dokázána první implikace.

2. (úplnost) Předpokládejme $\models_{E3} Tr(\varphi)$. Podle osmého lemmatu existují formule $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k \in Fle(IVL)$ ($k \geq 1$), které neobsahují disjunkci a platí:

$$\vdash_{IL+} \varphi \leftrightarrow (\vartheta_1 \vee \ldots \vee \vartheta_k).$$

Díky právě dokázané korektnosti platí také:

$$\models_{E3} Tr(\varphi \leftrightarrow (\vartheta_1 \vee \ldots \vee \vartheta_k)).$$

To je ekvivalentní s tvrzením:

$$\models_{E3} Tr(\varphi) \leftrightarrow (Tr(\vartheta_1) \vee \ldots \vee Tr(\vartheta_k)).$$

Protože platí $\models_{E3} Tr(\varphi)$, získáváme:

$$\models_{E3} Tr(\vartheta_1) \vee \ldots \vee Tr(\vartheta_k).$$

Zvolme za G množinu všech atomů vyskytujících se ve formulích $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$. Pak

$$\|Tr(\vartheta_1)\| \cup \ldots \cup \|Tr(\vartheta_k)\| = W^E_\alpha.$$

Protože formule $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ neobsahují disjunkci, jsou podle čtvrtého lemmatu modální intenze $\|Tr(\vartheta_1)\|, \ldots, \|Tr(\vartheta_k)\|$ uzavřené. Tedy podle devátého lemmatu existuje i $(1 \leq i \leq k)$ tak, že $\|Tr(\vartheta_i)\| = W^E_\alpha$. To znamená, že $\models_{E3} Tr(\vartheta_i)$. Dokážeme, že ϑ_i je klasická tautologie. Kdyby nebyla, pak by existovala $I \in Int(G)$, při které je tato formule nepravdivá. Pak by $M^{E3}_\alpha, \langle I, \{I\}\rangle \not\Vdash \vartheta_i$, tj. $M^{E3}_\alpha, \langle I, \{I\}\rangle \not\Vdash Tr(\vartheta_i)^*$. A protože do formulí, které jsou nepravdivé ve světě $\langle I, \{I\}\rangle$ je možno libovolně přidávat modality a zachová se jejich nepravdivost, platilo by $M^{E3}_\alpha, \langle I, \{I\}\rangle \not\Vdash Tr(\vartheta_i)$. Pak by ale neplatilo $\models_{E3} Tr(\vartheta_i)$, což by byl spor. Protože je ϑ_i tautologie, která neobsahuje disjunkci, platí $\vdash_{IL+} \vartheta_i$. Tedy také $\vdash_{IL+} \vartheta_1 \vee \ldots \vee \vartheta_k$, a tedy také $\vdash_{IL+} \varphi$. Q.E.D.

Poslední tvrzení, které uvedeme, se týká disjunkce v logice $IL+$. Řekli jsme, že ostatní spojky mají spíše klasický charakter. Nyní ukážeme, že disjunkce si zde zachovává důležitou vlastnost, která je typická pro intuicionistickou disjunkci a která se v klasické logice ztrácí.

Věta 5.3.2 *Nechť $\psi, \chi \in Fle(IVL)$ a platí $\vdash_{IL+} \psi \vee \chi$. Pak také platí $\vdash_{IL+} \psi$ nebo $\vdash_{IL+} \chi$.*

Důkaz: Můžeme postupovat podobně jako v předchozím důkazu. Podle osmého lemmatu existují formule $\psi_1, \ldots, \psi_k, \chi_1, \ldots, \chi_l \in Fle(IVL)$ $(k \geq 1,\ l \geq 1)$, které neobsahují disjunkci, a platí:

$$\vdash_{IL+} \psi \leftrightarrow (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k),$$

$$\vdash_{IL+} \chi \leftrightarrow (\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l).$$

Díky předpokladu platí:

$$\vdash_{IL+} \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k \vee \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_l.$$

Nechť G obsahuje atomy z formulí $\psi_1, \ldots, \psi_k, \chi_1, \ldots, \chi_l$. Pak

$$\|Tr(\psi_1)\| \cup \ldots \cup \|Tr(\psi_k)\| \cup \|Tr(\chi_1)\| \cup \ldots \cup \|Tr(\chi_l)\| = W_\alpha^E.$$

Všechny modální intenze, které zde vystupují, jsou uzavřené. Existuje mezi nimi tedy taková, která je totožná s množinou všech světů. Řekněme, že náleží formuli $Tr(\vartheta)$. Pak platí $\vdash_{IL+} \vartheta$. Pokud $\vartheta = \psi_i$ pro nějaké i ($1 \leq i \leq k$), pak $\vdash_{IL+} \psi$. Pokud $\vartheta = \chi_i$ pro nějaké i ($1 \leq i \leq l$), pak $\vdash_{IL+} \chi$. Q.E.D.

Reference

[1] Becker, O.: (1930) Zur Logik der Modalitäten, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, 11, s. 497-548.

[2] Běhounek, L.: (2005) Formální sémantika logiky modalit, in: [17], s. 51-88.

[3] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y.: (2001) *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Carnap, R.: (1946) Modalities and Quantification, *The Journal of Symbolic Logic*, 11, s. 33-64.

[5] Carnap, R.: (1959) *Studies in Semantics*, Harvard University Press, Harvard.

[6] Carnap, R.: (1960) *Meaning and Necessity*, The University of Chicago Press, Chicago.

[7] Carnap, R.: (1963) Intellectual Autobiography, in: [31], s. 3-84.

[8] Carnap, R.: (2002) *The Logical Syntax of Language*, Open Court, Chicago and La Salle.

[9] Coffa, J. A.: (1991) *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*, Cambridge University Press, Cambridge.

[10] Copeland, B. J.: (2002) The Genesis of Possible Worlds Semantics, *The Journal of Philosophical Logic*, 31, s. 99-137.

[11] Feys, R.: (1963) Carnap on Modalities, in: [31], s. 283-297.

[12] Frege, G.: (1992) O smyslu a významu, *Scientia at Philosophia*, 4, s. 33-75.

[13] Gheerbrant, A., Mostowski, M.: (2006) Recursive Complexity of the Carnap First Order Modal Logic C, *Mathematical Logic Quarterly*, 52, s. 87-94.

[14] Hendry, H. E., Pokriefka, M. L.: (1985) Carnapian Extensions of S5, *The Journal of Philosophical Logic*, 14, s. 111-128.

[15] Husserl, E.: (2004) *Ideje k čisté fenomenologii a fenomenologické filosofii I*, Oikoymenh, Praha.

[16] Husserl, E.: (2007) *Formální a transcendentální logika*, Filosofia, Praha.

[17] Kolman, V. (ed.): (2005) *Možnost, skutečnost, nutnost*, Filosofia, Praha.

[18] Kripke, S. A.: (1959) A Completeness Theorem in Modal Logic, *The Journal of Symbolic Logic*, 24, s. 1-14.

[19] Kripke, S. A.: (1963) Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 9, s. 67-96.

[20] Kripke, S. A.: (1963) Semantical Considerations on Modal Logic, *Acta Philosophica Fennica*, 16, s. 83-94.

[21] Kripke, S. A.: (1965) Semantical Analysis of Modal Logic II: Non-normal Modal Propositional Calculi, in: Addison, J. W., Henkin, L., Tarski, A. (eds.): *The Theory of Models*, North-Holland, Amsterdam, s. 206-220.

[22] Lewis, C. I.: (1912) Implication and the Algebra of Logic, *Mind*, 21, s. 522-531.

[23] Lewis, C. I., Langford, C. H.: (1951) *Symbolic Logic*, Dover Publications, New York.

[24] Lewis, C. I.: (1960) *A Survey of Symoblic Logic*, Dover Publications, New York.

[25] McKinsey, J. C. C.: (1945) On the Syntactical Construction of Systems of Modal Logic, *The Journal of Symbolic Logic*, 10, s. 83-94.

[26] Mleziva, M.: (1970) *Neklasické logiky*, Svoboda, Praha.

[27] Parry, W. T.: (1970) In Memoriam: Clarence Irving Lewis, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 11, s. 129-140.

[28] Peckhaus, V.: (2002) Oskar Beckers Stellung in der Geschichte der Modallogik, http:// kw.uni-paderborn.de/ en/ institute-einrichtungen/ institut-fuer-humanwissenschaften/ philosophie/ personal/ peckhaus/ texte-zum-download/.

[29] Peregrin, J.: (2004) *Logika a logiky*, Academia, Praha.

[30] Procházka, K.: (2005) Nutnost a modální redukcionismus, in: [17], s. 119-189.

[31] Schilpp, P. A. (ed.): (1963) *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Cambridge University Press, London.

[32] Schurz, G.: (2000) Rudolf Carnap´s Modal Logic, http:// www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/ fileadmin/ Redaktion/ Institute/ Philosophie/ Theoretische-Philosophie/ Schurz/ papers/ 2000a.pdf.

[33] Thomason, S. K.: (1973) A New Representation of S5, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 14, s. 281-284.